UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

Grado de Matemáticas

Trabajo Fin de Grado:

Trigonometría esférica y aplicación a la navegación.

Ana Ros Martínez

21 Julio 2014

Dirigido por:
Francisco Herrera Cuadra

Índice

1. Objetivos

En este trabajo lo que se persigue es mediante las matemáticas resolver problemas, tanto reales como hipotéticos, propios de la navegación. Trataremos de alcanzar los siguientes objetivos:

- Definir el triángulo esférico, e ilustrar las principales diferencias entre la geometría plana y la esférica.
- Propiedades y criterios de igualdad de los triángulos esféricos.
- Relaciones entre los elementos del triángulo: Teorema del Seno, Teorema del Coseno, Formulas de Bessel, analogías de Neper...
- Resolver triángulos rectángulos, rectiláteros y oblicuángulos, a partir de elemenos conocidos.
- Ilustrar algunas aplicaciones de la Trigonometría Esférica.
- Modelizar y resolver problemas de posicionamiento, aplicando la resolución de triángulos esféricos.

2. Antecedentes Bibliográficos

Los objetivos de la asignatura de Astronomía fueron entre otros, comprender el movimiento de los cuerpos celestes, saber situar mediante coordenadas un punto de la esfera celeste(definiciones báscias, coordenadas horizontales y ecuatoriales, cambio de coordenadas) y la medida del tiempo(tiempo sidereo, tiempo verdadero, tiempo medio, tiempo civil, tiempo oficial y tiempo universal). Todo esto se utiliza en la navegación, la cuál se basa en la trigonometría esférica que no ha sido estudiada a lo largo de los cuatro años de carrera, pero que forma parte de la rama de la geometría clásica. Y con todo esto abordaremos problemas de posicionamiento y navegación. Esta rama de las matemáticas está basada en los "*Elementos*" de Euclides. Es la ciencia de las figuras geométricas. Presupone varios conceptos, tales como el punto, la recta, la superficie y mediante comparación de ángulos o longitudes, atribuye ciertas propiedades que definen la geometría euclidiana. Aunque la trigonometría esférica es un clásico ejemplo de la geometría no euclidea que nació con la escuela griega. Hasta el siglo XIX toda la geometría se basaba en los axiomas y postulados recogidos en los "*Elementos*" de Euclides (sobre el 300 a.C.). En ellos había expresado axiomas o nociones comunes de caracter general y postulados como verdades eternas. En particular sus postulados eran:

1. Es posible trazar una línea recta desde un punto a cualquier otro.
2. Es posible prolongar continuamente en una línea recta una recta dada.
3. Es posible trazar un círculo con cualquier centro y radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una recta incide sobre otras dos formando del mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, al prolongarlas indefinidamente se encontrarán por el lado en que los ángulos sean menores que dos rectos.

El quinto postulado no es tan inmediato de demostrar como los demás, lo cual fue motivo de críticas por otros matemáticos griegos que fracasaron en el intento de demostrar que se podía deducir a partir de los otros axiomas. Finalmente los matemáticos llegaron a la conclusión de que este postulado era independiente de los otros cuatro, de modo que podían existir geometrías en las que la negación de este quinto postulado fuese un axioma, así nació la geometría no euclídea.

Aunque existe una cierta analogía entre algunos conceptos y propiedades de la geometría esférica y de la plana, no ocurre lo mismo con otras propiedades. Por ejemplo:

Trigonometría Plana	Trigonometría Esférica
Dos rectas en el plano se cortan en un único punto.	Dos circunferencias máximas se cortan en dos puntos.
Dos perpendiculares a una recta son paralelas.	Dos circunferencias máximas perpendiculares a otra se cortan en los polos de ésta.
La suma de los ángulos de un triángulo valen dos rectos.	La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos ángulos rectos.

3. Resultados

Los conceptos más importantes a resaltar del trabajo son los que siguen a continuación. Además, junto con otros desarrollados mas profundamente en otro apartado, podremos abordar los problemas de navegación.

Teorema del Coseno (primer grupo de fórmulas de Bessel): El coseno de un lado es igual al producto de los cosenos de los otros dos, más el producto de sus senos multiplicado por el coseno del ángulo comprendido,

$$\cos l_1 = cos l_2 \cos l_3 + \sin l_2 \sin l_3 \cos A_1$$

$$\cos l_2 = cos l_1 \cos l_3 + \sin l_1 \sin l_3 \cos A_2$$

$$\cos l_3 = cos l_1 \cos l_2 + \sin l_1 \sin l_2 \cos A_3$$

Teorema del Seno (segundo grupo de fórmulas de Bessel): Los senos de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos,

$$\frac{\sin l_1}{\sin A_1} = \frac{\sin l_2}{\sin A_2} = \frac{\sin l_3}{\sin A_3}$$

Tercera fórmula de Bessel: El seno de un lado por el coseno de un ángulo adyacente a él es igual al producto del coseno del lado opuesto al ángulo anterior, por el seno del otro lado menos el producto del seno de dicho lado opuesto, por el coseno del otro lado por el coseno del ángulo opuesto al lado inicial,

$$\sin l_1 \cos A_2 = \cos l_2 \sin l_3 - \sin l_2 \cos l_3 \cos A_1$$

Analogías de Neper:

$$\tan \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{\cos \frac{l_1 - l_2}{2}}{\cos \frac{l_1 + l_2}{2}} \cot \frac{A_3}{2}$$

$$\tan \frac{A_1 - A_2}{2} = \frac{\cos \frac{l_1 - l_2}{2}}{\cos \frac{l_1 + l_2}{2}} \cot \frac{A_3}{2}$$

$$\tan \frac{l_1 + l_2}{2} = \frac{\cos \frac{A_1 - A_2}{2}}{\cos \frac{A_1 + A_2}{2}} \tan \frac{l_3}{2}$$

$$\tan \frac{l_1 - l_2}{2} = \frac{\cos \frac{A_1 - A_2}{2}}{\cos \frac{A_1 + A_2}{2}} \tan \frac{l_3}{2}$$

4. Discusión

Con los resultados del apartado anterior y con algunas proposiciones y propiedades de los triángulos esféricos, podremos analizar varios probelmas de posicionamiento utiles en la navegación.

4.1. Introducción a la trigonometría esférica

La trigonometría es la ciencia que tiene por finalidad la resolución de triángulos, relacionando sus magnitudes lineales y angulares por medio del cálculo. Se divide en trigonometría plana y trigonometría esférica. La trigonometría esférica trata de las relaciones trigonométricas que existen entre los tres lados y los tres ángulos del triángulo esférico. Los lados de un triángulo esférico, siendo arcos, son expresados normalmente en unidades angulares, grados o radianes. Si se desea conocer la dimensión lineal de un lado, será necesario saber el radio de la esfera correspondiente al triángulo. En la práctica la longitud de un lado (arco) puede hallarse en función de cualquier unidad lineal, por medio de la siguiente analogía:

$$\frac{Longitud\ del\ ciclo}{Longitud\ del\ arco} = \frac{360^\circ}{grados\ del\ arco} = \frac{2\pi r}{l}$$

A lo largo de todo el trabajo vamos a utilizar los grados para medir los ángulos y los lados.

Los elementos de un triángulo esférico son: tres vértices, tres lados y tres ángulos.

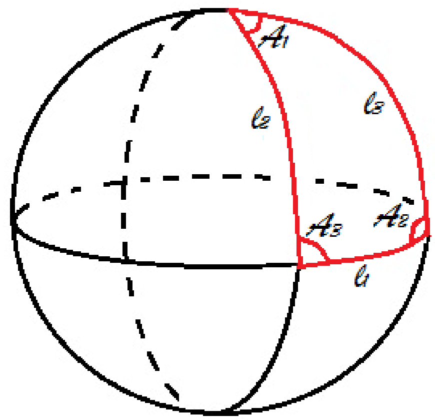


Figura 1: Triángulo esférico.

Los puntos A_1, A_2 y A_3 se llaman vértices. Los lados son los arcos l_1, l_2 y l_3 de circunferencia máxima comprendidos entre los vértices. Los ángulos A_1, A_2 y A_3 son la medida de los diedros de cada dos círculos máximos.

Definición 1.2: Se llama *diedro* a la región del espacio comprendido entre dos semiplanos limitados por una recta común.

Definición 1.3: Se llama *triedro* a la figura convexa formada por los puntos que son comúnes a los semiespacios limitados por los planos l_1l_2, l_2l_3 y l_1l_3 y que contienen a la semirecta restante.

Definición 1.4: La circunferencia máxima es la que se obtiene al seccionar una esfera por un plano que pasa por su centro, o bien, de todas los posibles circunferencias que puede contener una esfera, aquella que tiene de diámetro el mismo que el de la esfera.

Definición 1.1 Un *triángulo esférico* es la región de superficie esférica limitada por tres arcos de circunferencia máxima que se cortan dos a dos.

4.2. Propiedades de los triángulos esféricos

Entre los elementos de todos los triángulos esféricos se verifican las siguientes propiedades:

- Cualquier lado de un triángulo esférico es menor que una semicircunferencia.

$$l_i < 180°, \ i = 1, 2, 3$$

- Cada lado del triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos y mayor que el valor absoluto de su diferencia.$|l_1 - l_2| < l_3 < |l_1 + l_2|$
- La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que cuatro rectos.
$$l_1 + l_2 + l_3 < 360°$$
- En un triángulo esférico, a mayor lado se opone mayor ángulo esférico, y recíprocamente.
$$l_1 > l_2 \Longleftrightarrow A_1 > A_2$$
- En un triángulo esférico, a lados iguales se oponen ángulos iguales, y recíprocamente.
$$l_1 = l_2 \Longleftrightarrow A_1 = A_2$$
- La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos y menor que seis rectos.
$$180° < A_1 + A_2 + A_3 < 540°$$
- El menor de los ángulos de un triángulo esférico difiere de la suma de los otros dos en menos de dos rectos.
$$A_2 + A_3 - A_1 < 180°$$
- Un triángulo esférico isóceles tiene iguales los ángulos opuestos a los lados iguales y, consecuentemente, si un triángulo esférico tiene dos ángulos iguales, también es isóceles.

Estas propiedades se heredan de los triedros, de tal forma que cada propiedad de los triedros le corresponde una propiedad análoga de los triángulos esféricos.

4.2.1. Clasificación de los triángulos esféricos

Al igual que en la trigonometría plana, en la esférica tambien podemos considerar una clasificación, de la siguiente manera:

- Isóceles: Dos lados iguales.
- Equilatero: Tres lados iguales.

- Rectángulo: Un ángulo recto.
- Rectilátero: Un lado recto.
- Birrectángulo: Dos ángulos rectos.
- Birrectilátero: Tiene dos lados rectos.
- Trirrectángulo: Tres ángulos rectos y tres lados rectos.

Todo esto nos permite abordar la resolución de triángulos esféricos en todos sus casos, que son los siguientes:

- Dados los tres lados $l_1\, l_2$ y l_3.
- Dados los dos lados y el ángulo comprendido, por ejemplo l_1,l_2 y A_3.
- Dados dos lados y un ángulo opuesto, por ejemplo l_1,l_2 y A_1.
- Dados los tres ángulos A_1,A_2 y A_3.
- Dados dos ángulos y el lado común, por ejemplo A_1,A_2 y l_3.
- Dados dos ángulos y un lado opuesto, por ejemplo A_1,A_2 y l_1.

4.2.2. ¿Cuándo dos triángulos esféricos son iguales?

Podremos afirmarlo cuando se cumpla alguno de los criterios siguientes:

- Tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido.
- Tienen iguales un lado y los ángulos contiguos.
- Tienen sus lados iguales.
- Tienen sus ángulos iguales.

4.3. Relaciones

En todo triángulo esférico, se verifican las siguientes relaciones, siendo las mas importantes las analogías del teorema del coseno y del seno de la trigonometría plana, que nos serán de ayuda para la resolución de triángulos esféricos.

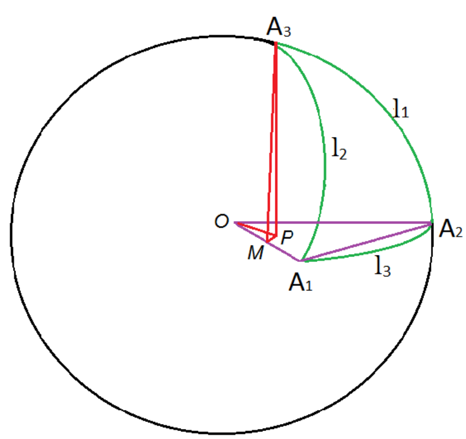
Teorema del Coseno (primer grupo de fórmulas de Bessel): El coseno de un lado es igual al producto de los cosenos de los otros dos, más el producto de sus senos multiplicado por el coseno del ángulo comprendido,

$$\cos l_1 = cos l_2 \cos l_3 + \sin l_2 \sin l_3 \cos A_1$$

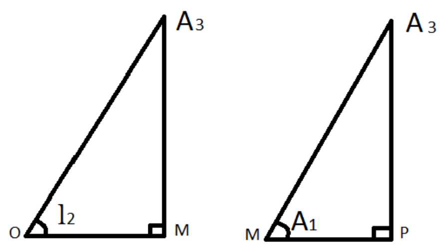
$$\cos l_2 = cos l_1 \cos l_3 + \sin l_1 \sin l_3 \cos A_2$$

$$\cos l_3 = cos l_1 \cos l_2 + \sin l_1 \sin l_2 \cos A_3$$

Demostración:
Supongamos A_1 y l_2 agudos. Sean P y M las proyecciones ortogonales del vértice A_3 sobre el plano A_1OA_2 y la recta OA_1, respectivamente. Por ser A_1 y l_2 agudos, P está en el interior de ΔA_1OA_2 y M sobre el segmento OA_1, respectivamente.



Se tiene entonces que
$A_3MP \perp OA_1$ pues $A_3P \perp OA_1$ y $A_3M \perp OA_1$
$A_3P \perp MP$ pues $A_3P \perp A_1OA_2 \supset MP$
Además, como $A_3OM = A_3OA_1$ y $POM = A_1OA_2$, se tiene $\angle(A_3OM, A_1OA_2) = A_1$.
Por tanto,



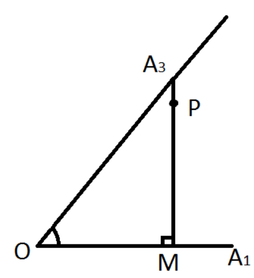
Si $|OM| = \cos l_2$ y $|MA_3| = \sin l_2 \Rightarrow |MP| = |MA_3| \cos A_1 = \sin l_2 \cos A_1$ y $|PA_3| = |MA_3| \sin A_1 = \sin l_2 \sin A_1$.

Por otra parte, podemos descomponer el segmento OA_3 como $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA_3}$, de modo que, proyectando ortogonalmente sobre el segmento OA_2, tenemos

$$\cos(\widehat{OA_3, OA_2}) = |OM| \cos(\widehat{OM, OA_2}) + |MP| \cos(\widehat{MP, OA_2}) +$$

$$+ |PA_3| \cos(\widehat{PA_3, OA_2})$$

Tenemos que $PA_3 \perp OA_2$ (por construcción) y $\angle(MP, OA_2) = 90° - l_3$ obtenemos



$$\cos l_1 = \cos l_2 \cos(\widehat{OM, OA_2}) + \sin l_2 \cos A_1 \cos(\widehat{MP, OA_2}) +$$

$$+ \sin l_2 \sin A_1 \cos(\widehat{PA_3, OA_2}) \Rightarrow \cos l_1 = \cos l_2 \cos l_3 + \sin l_2 \sin l_3 \cos A_1$$

Veamos ahora que la elección de A_1 y l_2 como ángulos agudos puede ser obviada. Si $A_1 > 90°$ entonces P está en el exterior de $\Delta A_1 O A_2$, de modo que $\angle(A_3OM, POM) = 180° - A_1$. Sin embargo, esto no afecta a la longitud del segmento MP, que será $|MP| = |MC \cos(180° - A_1)| = |MC| \cos A_1$. Si $l_2 > 90°$ podemos aplicar la fórmula al triángulo adyacente $\Delta A_1' A_2 A_3$, siendo A_1'

el simétrico de A_1 respecto al origen, y quedando los elementos del triángulo como sigue

$$l_1' = l_1 \quad l_2' = l_2 \quad l_3' = 180° - l_3 \quad A_1' = A_1$$

con lo que la fórmula se sigue satisfaciendo. Finalemente el caso $A_1 = 90°$ y $l_2 = 90°$. Las proyecciones de A_3 sobre OA_1 y AOA_2 coinciden, $M = P$, y el resultado se sigue tras algunas simplificaciones del argumento inicial. $\square$

Teorema del Seno (segundo grupo de fórmulas de Bessel): Los senos de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos,

$$\frac{\sin l_1}{\sin A_1} = \frac{\sin l_2}{\sin A_2} = \frac{\sin l_3}{\sin A_3}$$

Demostración

Consideremos otra vez la descomposición $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA_3}$ y sea Z un punto del espacio tal que $OZ \perp A_1OA_2$ y $|OZ| = 1$. Proyectamos OA_3 sobre OZ y obtenemos

$$\cos(\widehat{OA_3, OZ}) = |OM|\cos(\widehat{OM, OZ}) + |MP|\cos(\widehat{MP, OZ}) + |PC|\cos(\widehat{PC, OZ})$$

Como $OM, MP \subset A_1OA_2$ se tiene que $\cos(\widehat{OM, OZ}) = 0$ y $\cos(\widehat{MP, OZ}) = 0$.
Por otra parte $PA_3 \perp A_1OA_2$, es decir PA_3 es paralelo a OZ, luego $\cos(\widehat{PA_3, OZ}) = 1$. Se sigue que $\cos(\widehat{OA_3, OZ}) = \sin l_2 \sin A_1$.
Aplicamos el mismo argumento al ángulo A_2 (es decir, proyectando A_3 sobre OA_2 en vez de sobre OA_1 para obtener M) y obtenemos

$$\cos(\widehat{OA_3, OZ}) = \sin l_1 \sin A_2$$

de donde

$$\frac{\sin l_1}{\sin A_1} = \frac{\sin l_2}{\sin A_2}$$

Con el mismo argumento de simetría pero aplicado para l_3 y A_3 terminamos la demostración. $\square$

Aplicando el Teorema del Seno y Coseno se tiene:

$$\cos l_1 = \cos l_2 \cos l_3 + \sin l_2 \sin l_3 \cos A_1$$

$$\cos l_3 = \cos l_1 \cos l_2 + \sin l_1 \sin l_2 \cos A_3$$

$$\sin l_3 = \frac{\sin l_1}{\sin A_1} \sin A_3$$

Sustituyendo $\cos l_3$ y $\sin l_3$ en la primera fórmula obtenemos

$$\cos l_1 = \cos l_2 (\cos l_1 \cos l_2 + \sin l_1 \sin l_2 \cos A_3) + \sin l_2 \sin l_1 \sin A_3 \cot A_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos l_1 - \cos l_1 \cos {l_2}^2 = \sin l_1 \sin l_2 \cos l_2 \cos A_3 + \sin l_1 \sin l_2 \sin A_3 \cot A_1$$

como

$$\cos l_1 (1 - \cos {l_2}^2) = \cos l_1 \sin {l_2}^2$$

entonces

$$\cos l_1 \sin {l_2}^2 = \sin l_1 \sin l_2 \cos l_2 \cos A_3 + \sin l_1 \sin l_2 \sin A_3 \cot A_1$$

dividimos por $\sin l_1 \sin l_2$ obtenemos

$$\cot l_1 \sin l_2 = \cos l_2 \cos A_3 + \sin A_3 \cot A_1$$

De manera análoga y por permutación,

$$\cot l_1 \sin l_3 = \cos l_3 \cos A_2 + \sin A_2 \cot A_1$$

$$\cot l_2 \sin l_1 = \cos l_1 \cos A_3 + \sin A_3 \cot A_2$$

$$\cot l_2 \sin l_3 = \cos l_3 \cos A_1 + \sin A_1 \cot A_2$$

$$\cot l_3 \sin l_1 = \cos l_1 \cos A_2 + \sin A_2 \cot A_3$$

$$\cot l_3 \sin l_2 = \cos l_2 \cos A_1 + \sin A_1 \cot A_3$$

Tercera fórmula de Bessel: El seno de un lado por el coseno de un ángulo adyacente a él es igual al producto del coseno del lado opuesto al ángulo anterior, por el seno del otro lado menos el producto del seno de dicho lado opuesto, por el coseno del otro lado por el coseno del ángulo opuesto al lado inicial,

$$\sin l_1 \cos A_2 = \cos l_2 \sin l_3 - \sin l_2 \cos l_3 \cos A_1$$

Ahora aplicando las relaciones anteriores, llegamos a las siguientes fórmulas.

Proposición 1.1: El coseno de un ángulo es igual al producto de los senos de los otros dos ángulos, por el coseno del lado opuesto menos el producto de los cosenos de dichos ángulos,

$$\cos A_1 = -\cos A_2 \cos A_3 + \sin A_2 \sin A_3 \cos l_1$$
$$\cos A_2 = -\cos A_1 \cos A_3 + \sin A_1 \sin A_3 \cos l_2$$
$$\cos A_3 = -\cos A_2 \cos A_1 + \sin A_2 \sin A_1 \cos l_3$$

Proposición1.2: El seno de un ángulo por el coseno de un lado adyacente es igual al producto del coseno del ángulo opuesto a dicho lado, por el seno del otro ángulo, más el producto del seno y coseno de dichos ángulos, respectivamente, por el coseno del lado opuesto al ángulo inicial,

$$\sin A_1 \cos l_2 = \cos A_2 \sin A_3 + \sin A_2 \cos A_3 \cos l_1$$

Analogías de Neper: Las cuatro analogías de Neper se enuncian como siguen,

$$\tan \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{\cos \frac{l_1 - l_2}{2}}{\cos \frac{l_1 + l_2}{2}} \cot \frac{A_3}{2}$$
$$\tan \frac{A_1 - A_2}{2} = \frac{\cos \frac{l_1 - l_2}{2}}{\cos \frac{l_1 + l_2}{2}} \cot \frac{A_3}{2}$$
$$\tan \frac{l_1 + l_2}{2} = \frac{\cos \frac{A_1 - A_2}{2}}{\cos \frac{A_1 + A_2}{2}} \tan \frac{l_3}{2}$$
$$\tan \frac{l_1 - l_2}{2} = \frac{\cos \frac{A_1 - A_2}{2}}{\cos \frac{A_1 + A_2}{2}} \tan \frac{l_3}{2}$$

Centrémonos en los triángulos esféricos rectángulos y rectiláteros.

Proposición 1.3: En todo *triángulo esférico rectángulo* se verifican las siguientes relaciones:

1. $\cos l_1 = \cos l_2 \cos l_3$
   Se deduce del Teorema del Coseno, suponiendo $A_1 = 90°$.

2. $\sin l_2 = \sin l_1 \sin A_2$
   Se deduce del Teorema del Seno, suponiendo $A_1 = 90°$

3. $\tan l_2 = \tan l_1 \cos A_1$
   Se deduce de sustituir en $\cot l_1 \sin l_2 = \cos l_2 \cos A_3 + \sin A_3 \cot A_1$ el ángulo $A_1 = 90°$, entonces $\cot l_1 \sin l_2 = \cos l_2 + \cos A_3$ y por último $\tan l_2 = \tan l_1 \cos A_1$.

4. $\tan l_2 = \sin l_3 \tan A_2$
   Se deduce de de sustituir en $\cot l_2 \sin l_3 = \cos l_3 \cos A_1 + \sin A_1 \cot A_2$ el ángulo $A_1 = 90°$, entonces $\operatorname{cotg} l_2 \operatorname{sen} l_3 = \operatorname{cotg} A_2$ y obtenemos $\tan l_2 = \sin l_3 \tan A_2$.

5. $\cos l_1 = \cot A_2 \cot A_3$
   Se deduce de la proposición 1.1 suponiendo $A_1 = 90°$.

6. $\cos A_2 = \sin A_3 \cos l_2$
   Se deduce de sustituir en $\cos A_2 = -\cos A_1 \cos A_3 + \sin A_1 \sin A_3 \cos l_2$ el ángulo $A_1 = 90°$.

Como en todo triángulo esférico rectángulo existe siempre un elemento conocido, el ángulo recto, sólo necesitaremos cinco elementos más para determinar el triángulo por completo.

Al objeto de hacer más fácil recordar las fórmulas para la resolución de los triángulos rectángulos, recurrimos al Pentágono de Neper. Consiste en construir un pentágono con los elementos siguientes:

$$l_1 \quad A_2 \quad 90° - l_3 \quad 90° - l_2 \quad A_3$$

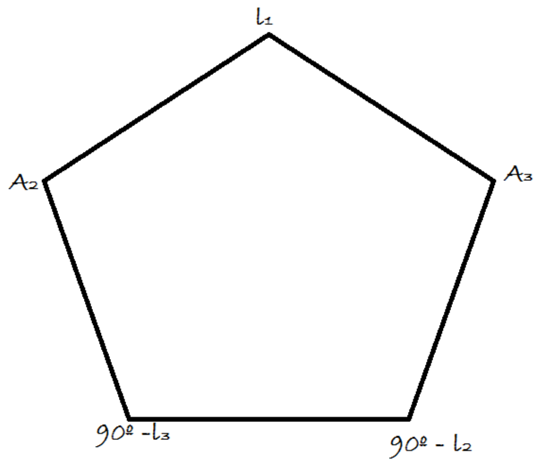


Figura 2: Pentágono de Neper para triángulos esféricos rectángulos

Establecemos las siguientes reglas mnemotécticas que seran suficientes para obtener todas las fórmulas relativas a los triángulos rectángulos:

- El coseno de un elemento cualquiera es igual al producto de los senos de los elementos opuestos.
- El coseno de un elemento cualquiera es igual al producto de las cotangentes de los elementos adyacentes.

Proposición 1.4: En todo *triángulo esferico rectilátero* se verifican las siguientes relaciones:

1. $\cos A_1 = -\cos A_3 \cos A_2$
   Se deduce de la Proposicióm 1.1, suponiendo $l_1 = 90°$.
2. $\sin A_2 = \sin A_1 \sin l_2$; $\sin A_3 = \sin A_1 \sin l_3$
   Se deduce del Teorema del Seno, suponiendo $l_1 = 90°$.
3. $\tan A_2 = -\tan A_1 \cos l_3$
   Se deduce de $\cot l_1 \sin l_3 = \cos l_3 \cos A_2 + \sin A_2 \cot A_1$, suponiendo $l_1 = 90°$.

4. $\tan A_2 = \tan l_2 \sin A_3$
   Se deduce de $\cot l_2 \sin l_1 = \cos l_1 \cos A_3 + \sin A_3 \cot A_2$ suponiendo $l_1 = 90°$.

5. $\cos A_2 = \cot l_2 \cot l_3$
   Se deduce del Teorema del Coseno, suponiendo $l_1 = 90°$ en $\cos l_1 = cos l_2 \cos l_3 + \sin l_2 \sin l_3 \cos A_1$.

6. $\cos l_2 = \sin l_3 \cos A_2$
   Se deduce del Teorema del Coseno, suponiendo $l_1 = 90°$ en $\cos l_2 = cos l_1 \cos l_3 + \sin l_1 \sin l_3 \cos A_2$.

Para resolver estos triángulos también recurriremos al Pentágono de Neper, pero ahora construimos el pentágono con los elementos siguientes:

$$180° - A_1 \quad 180° - l_2 \quad A_3 - 90° \quad A_2 - 90° \quad 180° - l_3$$

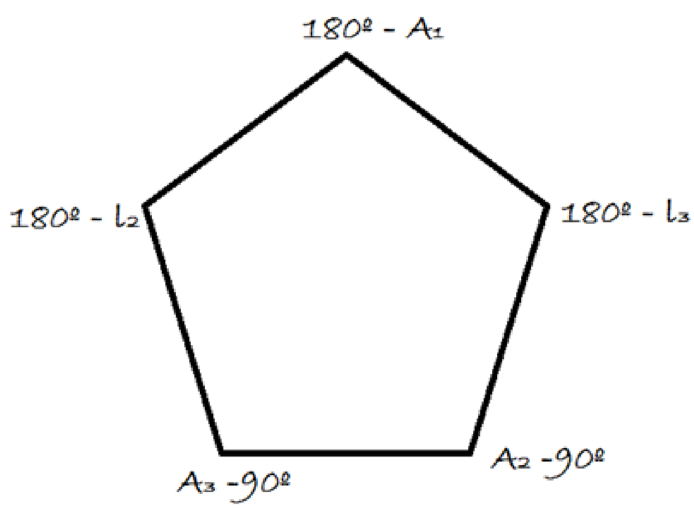


Figura 3: Pentágono de Neper para triángulos esféricos rectiláteros

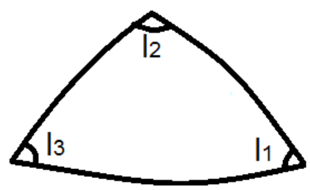
Y establecemos las siguientes reglas mnemotécticas:

- El coseno de un elemento cualquiera es igual al producto de los senos de los elementos opuestos.
- El coseno de un elemento cualquiera es igual al producto de las cotangentes de los elementos adyacentes.

4.4. Ejemplos Triángulos Esféricos.

Realicemos un ejemplo de cada caso que se nos puede presentar.

Ejemplo 1:Dados los tres lados $l_1 = 40°50'21'$,$l_2 = 139°10'35''$ y $l_3 = 110°50'01'$.



Solución: Utilizamos el Teorema del Coseno

$$\cos l_1 = \cos l_2 \cos l_3 + \sin l_2 \sin l_3 \cos A_1 \Rightarrow \cos A_1 = \frac{\cos l_1 - \cos l_2 \cos l_3}{\sin l_2 \sin l_3} =$$

$$= 0{,}7977462612 \Rightarrow \; A_1 = 37°05'4{,}48''$$

$$\cos l_2 = \cos l_1 \cos l_3 + \sin l_1 \sin l_3 \cos A_2 \Rightarrow \cos A_2 = \frac{\cos l_2 - \cos l_1 \cos l_3}{\sin l_1 \sin l_3} =$$

$$= -0{,}7981401255 \Rightarrow A_2 = 142°57'10{,}31''$$

$$\cos l_3 = \cos l_1 \cos l_2 + \sin l_1 \sin l_2 \cos A_3 \Rightarrow \cos A_3 = \frac{\cos l_3 - \cos l_1 \cos l_2}{\sin l_1 \sin l_2} =$$

$$= 0{,}5072373253 \Rightarrow A_3 = 59°31'12{,}06''$$

Supongamos ahora que nos dan estos tres lados: $l_1 = 90°$, $l_2 = 48°50'$ y $l_3 = 67°38'$. Ahora estamos ante un triángulo rectialátero en l_1, luego hacemos uso del Pentágono de Neper.

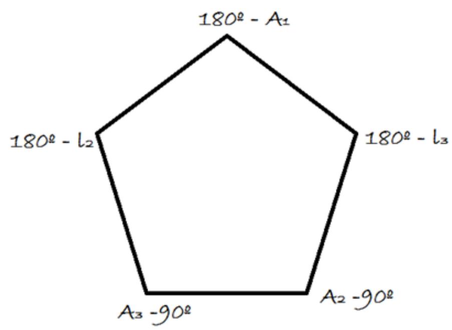


Figura 4: Pentágono de Neper.

$$\cos(180° - A_1) = \operatorname{cotg}(180° - l_2)\operatorname{cotg}(180° - l_3) = \frac{1}{\operatorname{tg}(180° - l_2)\operatorname{tg}(180° - l_3)} =$$

$$= 0{,}3598094492 \Rightarrow 180° - A_1 = 68°54'42'' \Rightarrow A_1 = 111°5'18''$$

$$\cos(180° - l_2) = \sin(180° - l_3)\sin(A_2 - 90°) \Rightarrow$$

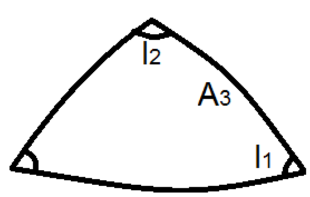
$$\Rightarrow \sin A_2 - 90° = -0{,}7118 \Rightarrow A_2 = 135°22'54''$$

$$\cos 180° - l_3 = \sin 180° - l_2 \sin A_3 - 90° \Rightarrow A_3 = 120°21'50''$$

Comprobamos con el Teorema del Coseno,

$$\frac{\sin l_1}{\sin A_1} = \frac{\sin l_2}{\sin A_2} = \frac{\sin l_3}{\sin A_3} = 1{,}07$$

Ejemplo 2: Dados dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, $l_1 = 64°24'03'$, $l_2 = 42°30'10''$ y $A_3 = 58°40'52''$.



Solución: Aplicamos el Teorema de Coseno:

$$\cos l_3 = \cos l_1 \cos l_2 + \sin l_1 \sin l_2 \cos A_3 = 0{,}6352607851 \Rightarrow l_3 = 50°33'38{,}42'$$

Y ahora con este dato nuevo,volvemos a aplicar el Teorema del Coseno para calcular A_1 y A_2.

$$\cos A_1 = \frac{\cos l_1 - \cos l_2 \cos l_3}{\sin l_2 \sin l_3} = -0{,}06951367 \Rightarrow A_1 = 0{,}93^\circ 59' 9{,}8''$$

$$\cos A_2 = \frac{\cos l_2 - \cos l_1 \cos l_3}{\sin l_1 \sin l_3} \Rightarrow A_2 = 48^\circ 21' 41{,}7''$$

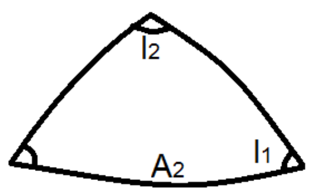
Comprobación:

$$\frac{\sin l_1}{\sin A_1} = 0{,}904025$$

$$\frac{\sin l_2}{\sin A_2} = 0{,}904025$$

$$\frac{\sin l_3}{\sin A_3} = 0{,}904025$$

Ejemplo 3: Dos lados y un ángulo no comprendidos entre ellos $l_1 = 58^\circ 46' 22'$, $l_2 = 137^\circ 02' 50''$ y $131^\circ 52' 33'$.



Solución: Aplicamos el Teorema del Seno:

$$\frac{\sin l_1}{\sin A_1} = \frac{\sin l_2}{\sin A_2} \Rightarrow \sin A_1 = 0{,}934428211$$

$$A_1 = \begin{cases} A_1 = 69^\circ 09' 09'' \Leftrightarrow l_1 < l_2 \\ A_1 = 110^\circ 51' 51'' \Leftrightarrow l_1 < l_2 \end{cases}$$

Como ninguna de las dos soluciones contradicen ninguna propiedad, obtenemos dos triángulos esféricos. Resolvámoslos:

- Primer triángulo: $A_1 = 69°08'09''$ Aplicamos las analogías de Neper.

$$\tan\frac{l_3}{2} = \frac{\cos\frac{A_1+A_2}{2}}{\cos\frac{A_1-A_2}{2}}\tan\frac{l_1+l_2}{2} = 1{,}537015124 \Rightarrow \frac{l_3}{2} = 56°57'5{,}41'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_3 = 113°54'81''$$

$$\tan\frac{A_1-A_2}{2} = \frac{\sin\frac{l_1-l_2}{2}}{\sin e\frac{l_1+l_2}{2}}\frac{A_3}{2} = 0{,}9567531364 \Rightarrow \frac{A_3}{2} = 0{,}807496 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_3}{2} = 46°15'57{,}9863'' \Rightarrow A_3 = 92°30'115{,}973''$$

- Segundo triángulo: $A_1 = 110°51'51''$ Aplicamos las analogías de Neper.

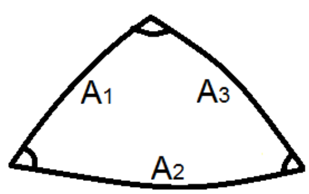
$$\tan\frac{l_3}{2} = \frac{\cos\frac{A_1+A_2}{2}}{\cos\frac{A_1-A_2}{2}}\tan\frac{l_1+l_2}{2} = 3{,}810568422 \Rightarrow \frac{l_3}{2} = 75°17'13{,}2'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_3 = 150°35'8''$$

$$\tan\frac{A_1-A_2}{2} = \frac{\sin\frac{l_1-l_2}{2}}{\sin\frac{l_1+l_2}{2}}\frac{A_3}{2} = 0{,}2910104659 \Rightarrow \frac{A_3}{2} = 1{,}2876 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_3}{2} = 73°46'28{,}024'' \Rightarrow A_3 = 146°92'56{,}049''$$

Ejemplo 4: Dados los tres ángulos $A_1 = 70°00'25''$, $A_2 = 131°10'15''$ y $A_3 = 94°50'53''$



Solución: Aplicamos el Teorema del coseno para ángulos:

$$\cos A_1 = -\cos A_2 \cos A_3 + \sin A_2 \sin A_3 \cos l_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos l_1 = \frac{\cos A_1 + \cos A_2 \cos A_3}{\sin A_2 \sin A_3} = 0{,}530015814 \Rightarrow l_1 = 57°59'37''$$

$$\cos A_2 = -\cos A_1 \cos A_3 + \sin A_1 \sin A_3 \cos l_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos l_2 = \frac{\cos A_2 + \cos A_1 A_3}{\sin A_1 \sin A_3} = -0{,}733895876 \Rightarrow l_2 = 137°12'51''$$

$$\cos A_3 = -\cos A_2 \cos A_1 + \sin A_2 \sin A_1 \cos l_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos l_3 = \frac{\cos A_3 + \cos A_2 \cos A_1 +}{\sin A_2 \sin A_1} = -0{,}437657969 \Rightarrow l_3 = 115°57'16''$$

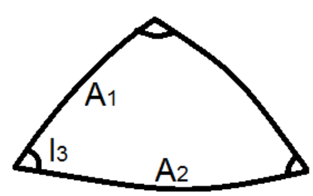
Podemos comprobar con el Teorema del Seno y ver que efectivamente se cumple:

$$\frac{\sin l_1}{\sin A_1} = 0{,}902369$$

$$\frac{\sin l_2}{\sin A_2} = 0{,}902369$$

$$\frac{\sin l_3}{\sin A_3} = 0{,}902369$$

Ejemplo 5: Dados dos ángulos y el lado común $A_1 = 70°51'15''$, $A_2 = 131°20'26''$ y $l_3 = 116°12'05''$.



Solución: Aplicamos el Teorema del Coseno para ángulos:

$$\cos A_3 = -\cos A_1 \cos A_2 + \sin A_1 \sin A_2 \cos l_3 = 0{,}0965239 \Rightarrow$$

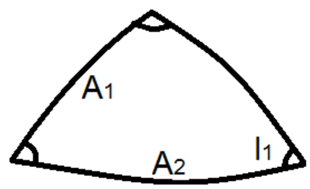
$$\Rightarrow A_3 = 95°32'21'$$

Ahora utilizamos de nuevo el Teorema del Coseno para calcular los lados l_1 y l_2.

$$\cos l_1 = \frac{\cos A_1 + \cos A_2 \cos A_3}{\sin A_2 \sin A_3} = 0{,}5242012028 \Rightarrow l_1 = 58°23'7{,}86''$$

$$\cos l_2 = \frac{\cos A_2 + \cos A_1 \cos A_3}{\sin A_1 \sin A_3} = -0{,}7361569118 \Rightarrow l_1 = 137°24'18''$$

Ejemplo 6: Dados dos ángulos y un lado opuesto, por ejemplo $A_1 = 76°$, $A_2 = 119°$ y $l_1 = 70°$.



Solución: Vamos a utilizar el Teorema del Seno,

$$\sin l_2 = \frac{\sin l_1 \sin A_2}{\sin A_1} = \frac{\sin 70° \sin 119°}{\sin 76°} = 0{,}8470342211 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_2 = \begin{cases} l_2 = 57°53'26'' \\ l_2 = 180° - 57°53'26'' = 122°6'34'' \end{cases}$$

Pero al ser $A_2 > A_1$ ha de verificarse que $l_2 > l_1 = 70°$, luego en este caso $l_2 = 122°6'34''$ y solo habrá una solución válida. Aplicamos las analogías de Neper:

$$\tan \frac{l_3}{2} = \frac{\cos \frac{A_1+A_2}{2}}{\cos \frac{A_1-A_2}{2}} \tan \frac{l_1 + l_2}{2} = 1{,}322596405 \Rightarrow \frac{l_3}{2} = 52°54'27'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_3 = 105°48'53{,}9''$$

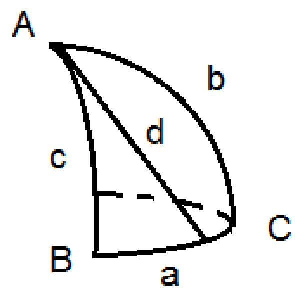
$$\tan \frac{A_1 - A_2}{2} = \frac{\sin \frac{l_1-l_2}{2}}{\sin \frac{l_1+l_2}{2}} \frac{A_3}{2} \Rightarrow \frac{A_3}{2} = 0{,}8918189807 \Rightarrow \frac{A_3}{2} = 0{,}84252$$

$$\Rightarrow \frac{A_3}{2} = 48°16'22{,}13'' \Rightarrow A_3 = 96°32'44{,}26''$$

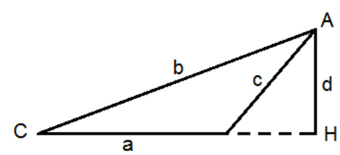
Ejemplo 7: Sobre una esfera de radio $R = 6370$km se sitúan 3 puntos, A, B y C, vertices de un triángulo esférico. Los ángulos en A y B valen respectivamente $A = 70°$ y $B = 119^{\circ}$, y el lado opuesto al ángulo A tiene como valos $a = 76°$. Calcular la distancia esférica en km entre el punto A y el lado opuesto, a.

Nota: La distancia esférica se define como el producto entre un arco de la esféra y el radio de ésta.

Solución



Lo que se pide es calcular la altura d sobre el lado a.



Para calcular d se resuelve el triángulo rectángulo ABH, del que se conocen $H = 90°$ y $B = 119°$. Se necesita otro dato, y éste puede ser el ángulo C. Para calcular el lado c, resolvemos el triángulo ABC. Aplicando el Teorema del Seno,

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A} = 0{,}903103573$$

$$\Rightarrow b = \begin{cases} 64°34'9'' \\ 180° - 64°34'9'' = 115°25'51'' \end{cases}$$

El arco $b = 64°34'9''$ no es válido, puesto que $B > A \Rightarrow b > a$ y no se cumple.

Calculamos C.

- Directamente con una fórmula de Neper,

$$\tan \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \cot \frac{C}{2}$$

  y obtendríamos $C = 73°17'40''$

- Calculando primero c, con otra fórmula de Neper,

$$\tan \frac{l_1 + l_2}{2} = \frac{\cos \frac{A_1 - A_2}{2}}{\cos \frac{A_1 + A_2}{2}} \tan \frac{l_3}{2}$$

  Obtenemos $c = 81°29'21''$ y por el Teorema del Coseno

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \cos C \Rightarrow C = 73°17'40''$$

Como C es agudo y B es obtuso, el triángulo corresponde a la figura dibujada. Ahora si se puede resolver el triángulo AHB conocidos H, B y c. Con el Teorema del Seno,

$$\sin d = \frac{\sin b \sin C}{\sin 90°} = 0{,}864988471$$

Obtenemos d=

$$\Rightarrow b = \begin{cases} 59°52'53'' \\ 180° - 59°52'53'' = 120°07'07'' \end{cases}$$

La solución de $120°07'07''$ no es válida puesto que $C < H \Rightarrow d > b$. Pasando el ángulo radianes

$$\frac{\pi}{180°} = \frac{d}{59°52'53''} \Rightarrow d = 1{,}045127397$$

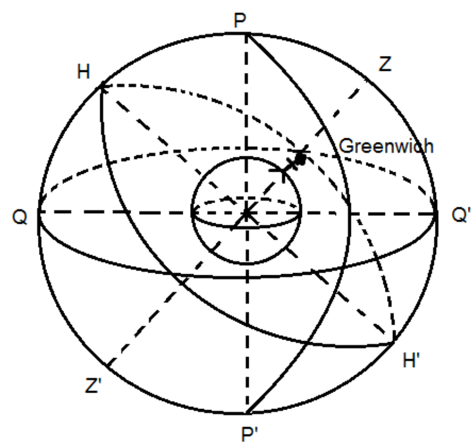
Por último la distancia es

$$Distancia\ esférica(km) = dR = 6657{,}461km$$

4.5. Esfera Celeste

En la astronomía esférica interesa únicamente la dirección en que aparecen los astros a la vista del observador, no importa a la distancia que se hallen, los suponemos proyectados en una esfera ideal de radio arbitraio, aunque inmenso, a la que damos nombre de esféra celeste. Esto se puede realizar porqué la traslación de La Tierra respecto al Sol en su orbita es un movimiento despreciable en relación a las magnitudes enormes del universo.
La esfera celeste tiene al igual que La Tierra un polo Norte y un polo Sur,

que se obtienen como la prolongación del eje de giro de La Tierra. Del mismo modo la proyección del ecuador de La Tierra sobre la esfera celeste daría como resultado el ecuador celeste.
El observador sólo ve la mitad de la esfera celeste, lo que se llama el arco visible sobre el el horizonte. El punto vertical que tiene sobre su cabeza el observador se llama cenit, y bajo sus pies, el nadir.
El semicírculo máximo que pasa por los polos y por los distintos puntos del observador, es el meridiano que se toma de referencia para medir las longitudes y que además divide al globo en dos hemisferios, es el meridiano cero o primer meridiano, o tambien conocido por meridiano de Greenwich.



4.6. Coordenadas Celestes

La Astronomía de Posición es la ciencia que estudia la posición y movimientos de los cuerpos materiales del universo en el espacio y en el tiempo, mediante medidas efectuadas en observaciones astronómicas.

La posición de un cuerpo en el espacio se define como el lugar geométrico que ocupa con respecto a un sistema de referencia elegido, y queda determinada por una relación espacial respecto a dicho sistema de referencia de cuya elección dependerá la posición del cuerpo, que será por tanto relativa.

El movimiento de los cuerpos materiales del universo se define como el cambio de posición que experimentan con respecto al tiempo. El movimiento se determina respecto a un sistema de referencia espacio-temporal; es decir, además de referir las posiciones del cuerpo en movimiento respecto a un sistema de referencia espacial, será necesario establecer un sistema de referencia temporal que permita correlacionar, mediante una métrica -escala de tiempo- establecida a priori en este sistema, las posiciones sucesivas que el cuerpo va ocupando.

Así pues, el problema básico de la Astronomía de Posición consiste en la elección adecuada de sistemas de referencia para determinar la posición y el movimiento de los cuerpos del universo. De esta elección dependerán los principios y métodos que se utilizarán en las observaciones astronómicas, que constituyen el fundamentento empírico de la Astronomía.

1. Las coordenadas horizontales o azimutales, conjuntamente con las horarios, pertenecen a las llamadas locales, ya que dependen de la situación del observador.

   En este sistema de coordenadas el polo fundamental es el cenit Z, correspondiente a un determinado observador situado en la superficie terrestre. El eje polar es la línea cenit-nadir ZZ' y el círculo fundamental de referencia es el horizonte racional o verdadero HH'.

   Los círculos máximos, que pasan por el cenit y por el nadir, son los círculos secundarios y reciben el nombre de verticales. El círculo vertial que pasa por los puntos cardinales este y oeste se llama vertical primario. Los verticales quedan divididos en dos por la línea cenit-nadir. Los semicírculos que contienen los polos norte y sur celestes, P y P', y que coinciden con el meridiano del lugar, reciben el nombre de vertical norte y vertical sur respectivamente, siendo el primero el semicírculo secundario de referencia.

   Los paralelos secundarios son círculos menores, que pasan por el centro del astro y reciben el nombre de almicantaradas.

   Las coordenadas son la altura verdadera y el azimut.

   Altura verdadera (av): es el arco vertical del astro, comprendido entre el horizonte y el centro del astro o el almicantarat. Cuando el astro está encima del horizonte la altura es positiva, cuando está debajo del horizonte la altura es negativa y no interesa al observador porqué no la podrá observar. En este caso se díce que el astro esta depreso.

   Azimut (Z): es el arco de horizonte, comprendido entre el vertical norte y el vertical del astro.Hay tres clases:

   - Azimut náutico: Se cuenta desde el norte 0° a 360° por el este se llama circular, se designa por tres cifras y siempre es positivo.

- Azimut por cuadrante: El azimut nautico se llama cuadrante cuando se cuenta desde uno de los puntos N o S, hasta el pie del vertical del astro a 0° a 90° hacia el este o al oeste.
- Azimut astronómico: Es el arco del horizonte contado desde el polo elevado hasta el vertical del astro.

Al complemento de la altura $90° - av$ (siempre menos de 90° porque la altura debe ser positiva), arco comprendido entre el cenit y el centro del astro, se llama distancia cenital.

Al complemento del azimut náutico cuadrantal $90° - Z$, arco comprendido entre el punto cardinal este u oeste más próximo y el pie del vertical del astro, se le llama amplitud.

El almicantarat es el lugar geométrico de todos los puntos de la esfera celeste que tienen la misma altura.

El vertical del astro es el lugar geométrico de todos los puntos de la esfera celeste que tienen el mismo azimut.

2. Coordenadas horarias: En este sistema de coordenadas el polo fundamental es el polo norte de la esfera celeste (P). El eje polar es la línea de los polos (PP') y el círculo fundamental de referencia es el ecuador celeste.

   Los semicírculos secundarios son los que unen los polos celestes y pasan por el centro del astro, y se llaman semicírculos horarios. Los paralelos secundarios son los círculos menores paralelos al ecuador celeste, que pasan por el centro del astro y se llaman paralelos de declinación.

   Las coordenadas horarios son la declinación y el horario.

   La declinación (d): es el arco de semicírculo horario comprendido entre el ecuador celeste y el centro del astro.

   El horario (h): es el arco de ecuador, comprendido entre el meridiano superior del lugar y el semicírculo horario. Se cuenta de 0° a 360° a partir del meridiano superior, por el oeste y se le da nombre de horario astronómico.

   El semicírculo horario es el lugar geométrico de los puntos de la esfera que tienen el mismo horario.

El arco de semicírculo horario comprendido entre el polo elevado y el centro del astro se llama distancia polar o codeclinación y es igual a $90° - d$ o $90° + d$ dependiendo de si la declinación y la latitud son de la misma especie o distinta, respectivamente.

3. Coordenadas uranográficas ecuatoriales: El polo fundamental es el polo Norte P de la esfera celeste y el círculo fundamental es el ecuador celeste. Los semicírculos secundarios son los que, unen los polos celestes y pasan por el centro del astro y se le llama máximo de ascensión.

   Las coordenadas son la declinación y la ascención recta.

   La declinación es el arco máximo de ascensión contado desde el ecuador hata el astro.

   La ascensión recta, es el arco de ecuador celeste comprendido entre el primer máximo de ascensión (Aries,γ) y el máximo de ascensión correspondiente al astro de que se trate, se mide en el sentido contrario de las agujas del reloj. Actualmente se utiliza el *ángulo sidéreo* que es igual $360° - AR$.

   El arco máximo de ascensión comprendido entre el polo elevado y el centro del astro se llama distancia polar o codeclinación y es igual a $90° - d$ o $90° + d$ dependiendo de si la declinación y la latitud son de la misma especie o distinta, respectivamente.

4.7. Triángulo de posición.

Para resolver el problema de la posición debemos mirar al exterior de la esfera terrestre, puesto que no es posible establecer las coordenadas de un lugar en una esfera haciendo sólo uso de sus propiedades intrínsecas. Por medio de las coordenadas esféricas queremos situar un astro en la esfera, entonces tendremos formado un triángulo esférico (PZA), cuyos vértices son el polo (P), el cenit (Z) y el astro (A). El problema se puede construir en el polo norte o polo sur, dependiendo de dónde se encuentre el observador, nosotros vamos a construir el del polo Norte, siendo el del polo Sur similar.

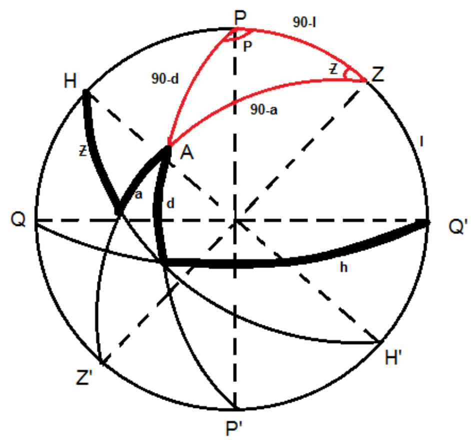


Figura 5: Triángulo de posición.

Los tres lados del triángulo de posición son:

- $PZ = 90° - l$ que es el complemento de ZQ que es la latitud del observador.
- $PA = 90° - d$ que es el complemento de la declinación.
- ZA es la distancia cenital y es el complemento de aA o altura verdadera del astro (calculada con el sextante) y será igual a $90° - a$.

Los ángulos:

- Ángulo P o ángulo en el polo, siempre será igual al horario oriental o occidental, veamoslo mejor ilustrado.

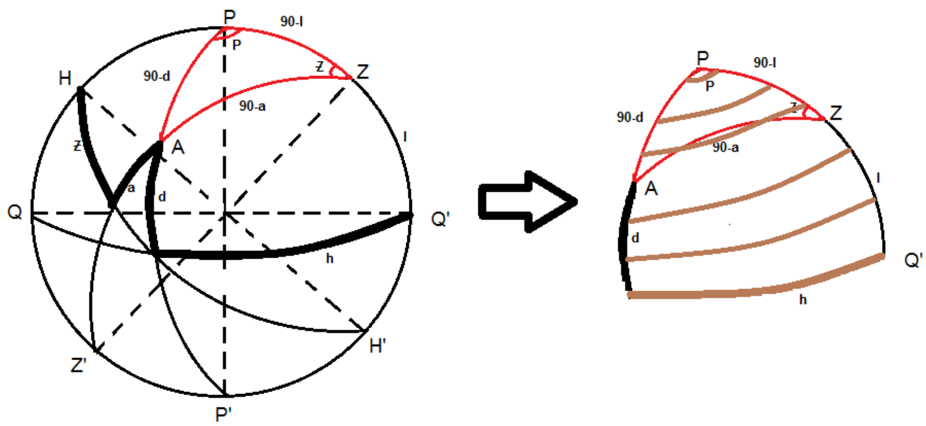


Figura 6: Ángulo P.

- Ángulo Z o ángulo cenital que es igual al azimut, contado desde el punto cardinal correspondiente al polo elevado, ilustradamente,

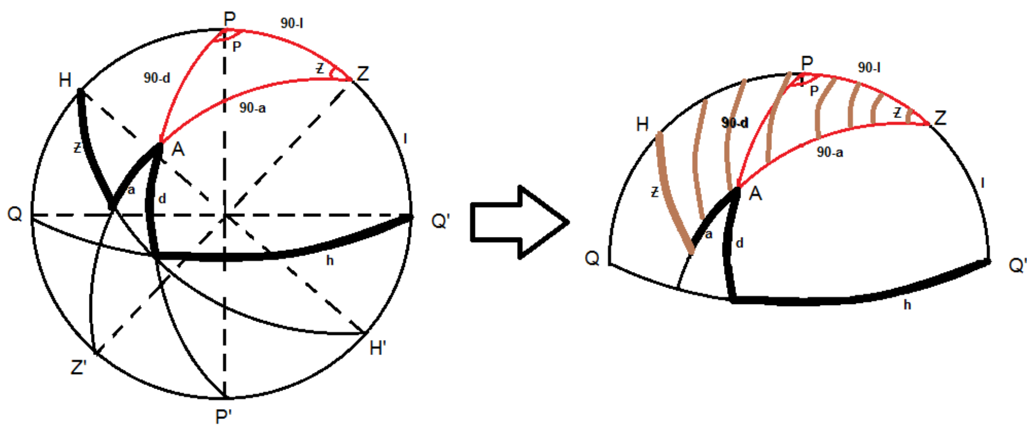


Figura 7: Ángulo Z.

- Ángulo A es el ángulo de posición, que no se considera casi nunca.

4.8. Medida del tiempo.

El objeto fundamental de la Astronomía de Posición es la determinación precisa de las posiciones de los astros y los cambios que en éstas se producen.

Por ello, se hace imprescindible establecer alguna variable que nos mida estas variaciones posicionales. Si nos referimos al Universo podemos definir *tiempo* como la variable que describe los cambios que experimentan las coordenadas espaciales de los astros, estando pues íntimamente relacionado con la idea de movimiento.

Para la medición del tiempo se necesitó tomar una referencia exterior a La Tierra se eligió para ello el Sol, dada su influencia de la vida sobre nuestro planeta, dando lugar a dos unidades naturales para dicha medición, que son el día y el año.

- **Tiempo Universal**: Se llama tiempo universal que se designa por TU, al tiempo civil referido al meridiano de Greenwich o primer meridiano. En el Acuerdo Internacinal de París de 1912 se decidió el empleo del tiempo universal en todos los países para usos astronómicos y las radiocominicaciones.

- **Hora civil en Greenwich**: Es el tiempo que ha transcurrido desde que el sol medio pasó por el meridiano inferior de Greenwich o meridiano de 180°
$$HcG = UTC = HcL + L$$

- **Hora civil del lugar**: Se denomina hora civil del lugar (HcL) al intervalo de tiempo que hace que pasó el sol medio por el meridiano inferior del lugar. Por tanto, cada meridiano tendrá una hora civil diferente. Los meridianos que estén más al este contarán más horas por que verán salir el Sol antes y los que estén más al oeste contarán menos horas por aparecer el Sol más tarde.
$$HcL = HcG - L$$

La diferencia entre los horarios de un astro, referidos a dos lugares distintos y a un mismo instante, es igual a la diferencia en la longitud de dichos lugares. Y aplicado a las horas entre dos lugares:

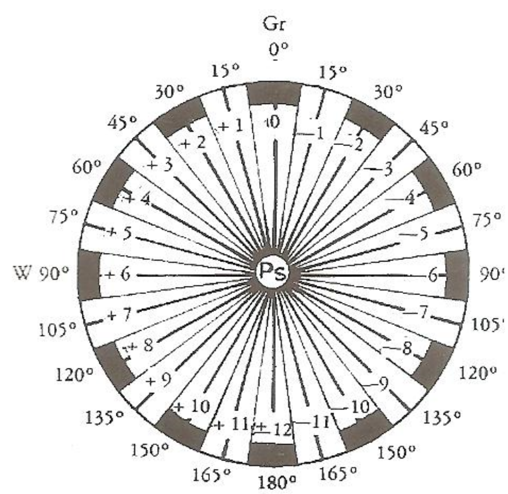
$$HL' - HL = L' - L = \Delta L$$

O sea, que la diferencia de horas entre dos lugares, referidas a un mismo astro e instante, es igual asimismo, a la diferencia entre las longitudes de dichos lugares.

Resumiendo podemos decir que:

1. La diferencia de horas es igual a al adiferencia de longitudes.
2. Los meridianos que están más al este cuentan más horas y los que están más al oeste cuentan menos horas.

Husos horarios: El hecho de que los lugares de La Tierra cuenten diferentes horas es un inconveniente para las comunicaciones y negocios. Para solucionar este problema se dividió La Tierra en 24 husos esféricos (z) de 15° cada uno y se estableció que los lugares enclavados en un mismo huso contaran la misma hora, que debería ser la correspondiente al meridiano central del huso. El primer huso, llamado huso cero, tiene meridiano central el meridiano de Greenwich y se extiende 7°30′ hacia el este, con signo negativo, y hacia el oeste, con signo positivo.



Hora Legal: Si regulasemos nuestros relojes de acuerdo con la hora civil, dado que ésta es diferente para cada meridiano, nos encontraríamos que al trasladarnos de un lugar a otro cambiando de meridiano, tendríamos que ir cambiando continuamente la hora. Para evitar este problema se usan los husos horarios.

$$HcG = UTC = Hr = Hz + z$$

Hora Oficial: La hora oficial (Ho) es la que establece cada país para aprovechar mejor las horas de luz solar.

$$HcG = UTC = Ho + O$$

Siendo O la diferencia entre la hora de Greenwich y la hora oficial. En España tenemos una hora más que Greenwich y en verano tenemos dos.

4.8.1. Ejemplos

Ejemplo 1: En un lugar de $L = 30°30'$ E siendo HcL=10h30m del día 5 de Enero. Hallar la HcG.

Solución:

Pasamos la longitud a tiempo multiplicando por 4, rebajando la especie, o sea, los minutos serán segundos de tiempo; los grados serán minutos: $30°30'$x4 = $2h02m00s$.

$HcL = 10h30m,\ L = 2h - 02m \Rightarrow HcG = HcL - L = 8h28m$

Como vamos de un lugar del este hacia Greenwich, que esta al oeste, contarán menos horas.

Ejemplo 2: El día 20 de Julio siendo $UTC = 15h30m$ se desea saber la HcL de un punto de $L = 28°40'W$.

Solución:

Pasamos la longitud a tiempo, multiplicando por 4, $L = 1h42m40s$

$HcG = 15h30m00s,\ L = 1h42m40s,\ W$

$HcL = HcG - L = 13h47m20s$

Como vamos a un lugar al oeste, contarán menos horas.

Ejemplo 3: Se desea saber la hora legal y la hora civil del lugar que corresponde a un punto de $L = 150°40'$, siendo $UTC = 16h00m$ del día 21 de Febrero.

Solución:

La longitud en tiempo será: $L = 10h02m40s$, lo hemos calculado igual que en el Ejemplo 1, multiplicando por 4 y el huso será $Z = 10$

Hora legal:

$HcG = UTC = 16h - 00m\ (21),\ z = 10,\ E$

$HcG + z = 26h00m(21) = 02h\ (22)$

Hora civil:

$HcL = HcG + L = 26h02m40s(21) = 02h02m40s,\ (22)$

4.9. Sextante

El sextante es un instrumento que sirve para medir ángulos y se utiliza en la mar para medir las alturas de los astros sobre el horizonte visible o de la mar.

Está constituido por un sector de metal de un arco de 60°, el cual puede medir ángulos hasta 120°.Lleva una alidada que gira alrededor del centro de la circunferencia que corresponde al sector y sobre el cual se lee la altura del astro sobre el horizonte en grados.

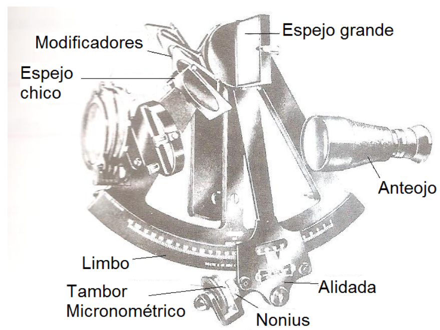


Figura 8: Instrumento para medir ángulos.

El limbo del sector está graduado y ésta graduación tiene un valor doble del que corresponde al arco del sector. El punto inicial o cero de la graduación del limbo corresponde al momento en que la posición de los dos espejos, grande y chico es paralela una a la otra.

5. Conclusiones

Vistos los conceptos fundamentales de trigonometría esférica y de navegación, vamos a ponerlo en práctica resolviendo un problema típico de navageción como es calcular la posición de un astro.

Ejercicio: El 10/09/14 siendo $HRB = 5h20min$ (la hora del reloj de bitácora, que es la hora de abordo) en situación estimada $l = 24°35'N$ y $L = 13°W$ tomamos la altura sextantal de un astro desconocido, que una vez corregida es $Av = 55°30'$ y un azimut verdadero $Z_v = 175°$. Queremos saber de que astro se trata.

Solución: Primeramente debemos situarnos en el huso horario correspondiente, para ello como son 360° y 24° husos, da un total de 15 intervalos horarios. Fijamos primero el meridiano de Greenwich, ya que es el 0°.

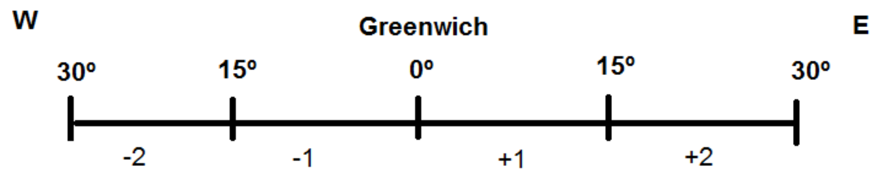


Figura 9: Husos horarios.

Por tanto estamos en el huso horario correspondiente a +1 ya que estamos al W como nos indica la longitud. Estamos en condiciones de calcular el Tiempo Universal (TU),

$$TU = 5h20min + 1h = 6h20min$$

El siguiente paso es con ayuda del almanaque nautico, buscar el TU, y obtenemos $84°12{,}8'W$, le restamos la longitud, puesto que estamos al oeste, y obtenemos que la hora local de Aries es, $hl\Psi = 71°12{,}8'W$. Nuestro objetivo es calcular la posición del astro, es decir, queremos saber la declinación y el ángulo sidereo.
Calculamos el horario local de la estrella $(hl*)$ a partir de una de las fórmulas vistas anteriormente obtenidas a partir del Teorema del Seno y Coseno,

$$\operatorname{cotg} l_1 \sin l_2 = \cos l_2 \cos A_3 + \sin A_3 \operatorname{cotg} A_1$$

vamos a depejar $\operatorname{cotg} A_1$,

$$\operatorname{cotg} A_1 = \frac{\operatorname{cotg} l_1 \sin l_2 - \cos l_2 \cos A_3}{\sin A_3}$$

$$\operatorname{cotg} A_1 = \frac{\operatorname{cotg} l_1 \sin l_2}{\sin A_3} - \frac{\cos l_2}{\tan A_3}$$

Llegados a este punto, tenemos en cuenta el triángulo de posición,

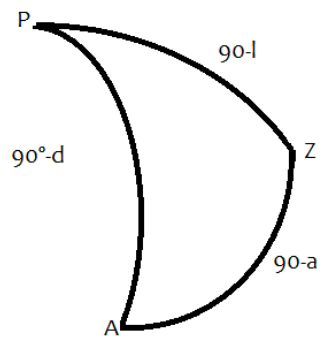


Figura 10:

$$A_1 = P \quad l_1 = 90° - a \quad Z = A_3 \quad l_3 = 90° - d \quad A_2 = A \quad l_2 = 90° - l$$

$$\operatorname{cotg} P = \frac{\operatorname{cotg} 90° - a \sin 90° - l}{\sin Z} - \frac{\cos 90° - l}{\tan Z}$$

$$\operatorname{cotg} P = \frac{\tan a \cos l}{\sin Z} - \frac{\sin l}{\tan Z}$$

$$\operatorname{cotg} P = \frac{\tan a \cos l}{\sin Z} - \frac{\frac{\sin l}{\cos l} \cos l}{\tan Z}$$

$$\operatorname{cotg} P = \left(\frac{\tan a \cos l}{\sin Z} - \frac{\tan l}{\tan Z} \right) \cos l$$

Sustituimos nuestros datos, $a = 55°30'$, $l = 24°30'$ y $Z = 175°$. Y obtenemos $P = 2°52{,}3'$ lo que quiere decir que el horario local de la estrella $(hl*)$, es de $2°52{,}3'E = 357°7{,}7'W$. Así pues el ángulo sidereo es,

$$AS = 357°7{,}7'W - 71°12{,}8'W = 285°54{,}9'$$

Nos queda calcular la declinación que la obtenemos partiendo de la fórmula del Teorema del Coseno, $\cos l_1 = \cos l_2 \cos l_3 + \sin l_2 \sin l_3 \cos A_3$, otra vez utilizamos el trángulo de posición con las siguientes correspondencias,

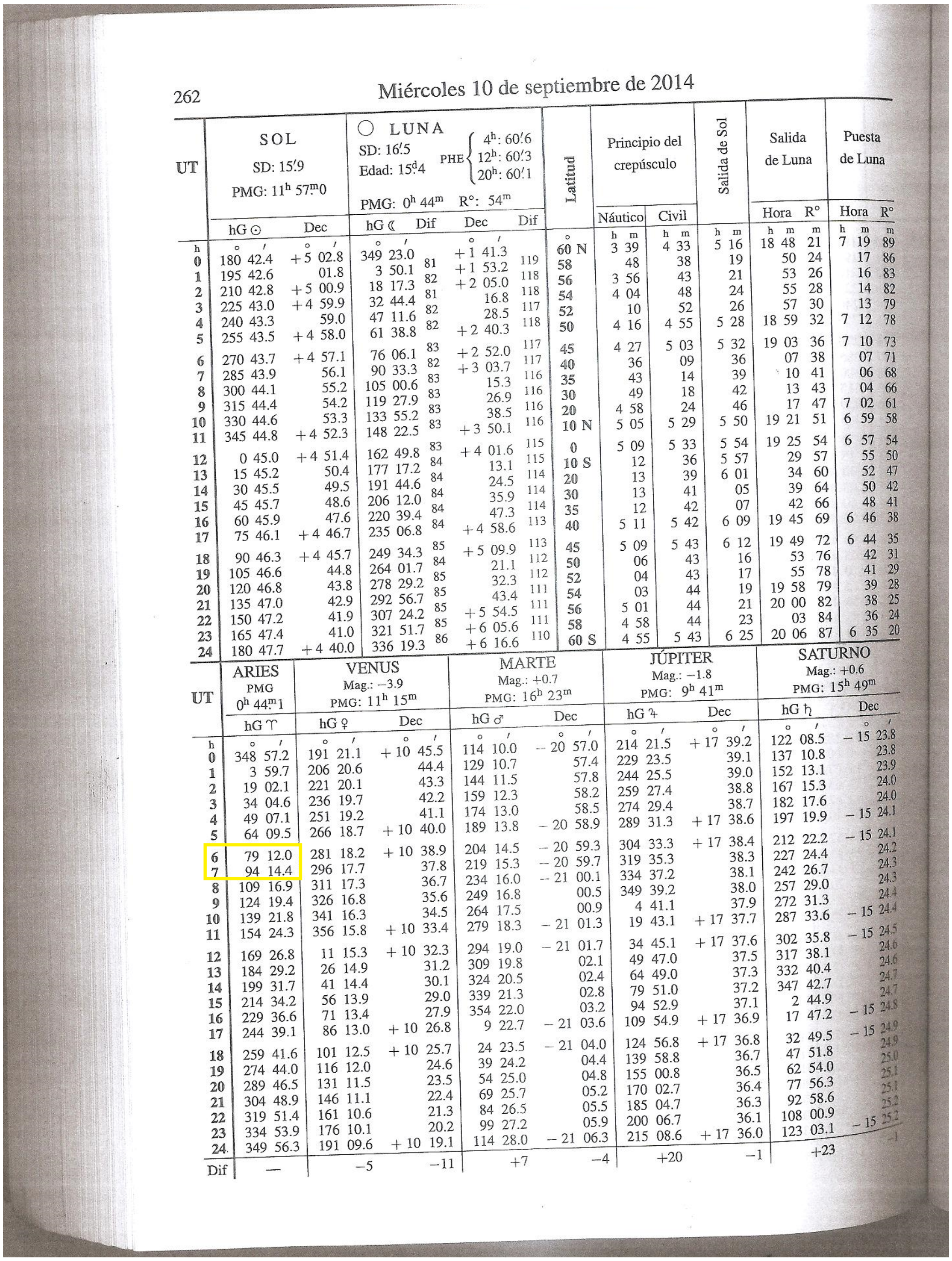
$$A_1 = Z \quad l_1 = 90° - d \quad l_3 = 90° - l \quad A = A_3 \quad A_2 = P \quad l_2 = 90° - a$$

Las sustituimos en la fórmula del Teorema del Coseno,

$$\cos 90° - d = \cos 90 - a \cos 90 - l + \sin 90° - a \sin 90° - l \cos Z$$

$$\sin d = \sin a \sin l + \cos a \cos l \cos Z$$

Sustituimos los datos y obtenemos que $\sin d = -0{,}1702$⇒d=9°48,2′S. Ya disponemos de los dos datos necesarios para buscar en el almanaque nautico, el ángulo sidereo y la declinación. Estos datos corresponden al astro *Rigel*.

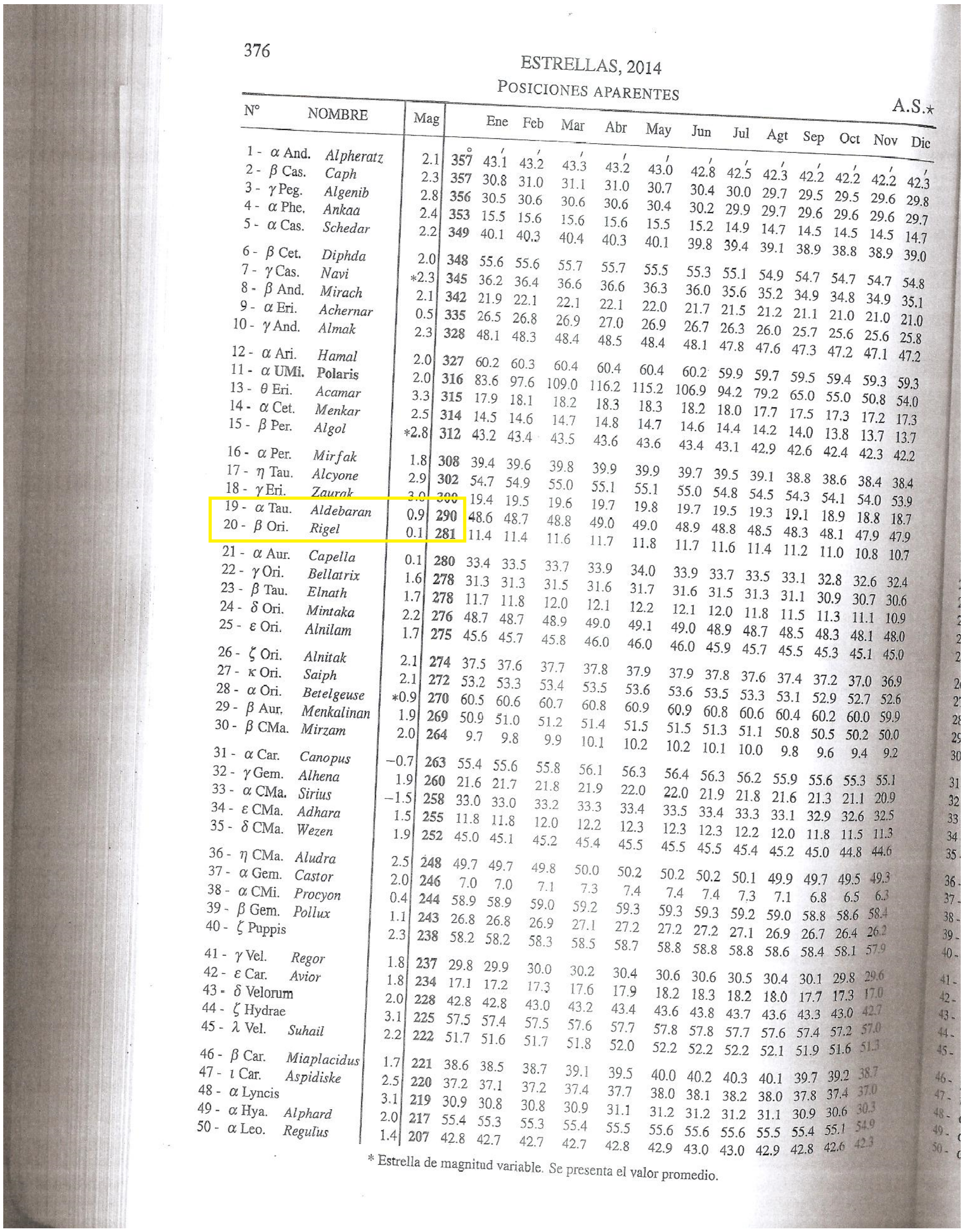


262 Miércoles 10 de septiembre de 2014

UT	SOL SD: 15'.9 PMG: 11h 57m.0		LUNA SD: 16'.5 Edad: 15d.4 PHE { 4h: 60'.6, 12h: 60'.3, 20h: 60'.1 } PMG: 0h 44m R°: 54m				Latitud	Principio del crepúsculo		Salida de Sol	Salida de Luna		Puesta de Luna	
	hG ☉	Dec	hG ☾	Dif	Dec	Dif		Náutico	Civil		Hora	R°	Hora	R°
h	° '	° '	° '		° '		°	h m	h m	h m	h m	m	h m	m
0	180 42.4	+5 02.8	349 23.0	81	+1 41.3	119	60 N	3 39	4 33	5 16	18 48	21	7 19	89
1	195 42.6	01.8	3 50.1	82	+1 53.2	118	58	48	38	19	50	24	17	86
2	210 42.8	+5 00.9	18 17.3	81	+2 05.0	118	56	3 56	43	21	53	26	16	83
3	225 43.0	+4 59.9	32 44.4	82	16.8	117	54	4 04	48	24	55	28	14	82
4	240 43.3	59.0	47 11.6	82	28.5	118	52	10	52	26	57	30	13	79
5	255 43.5	+4 58.0	61 38.8	83	+2 40.3	117	50	4 16	4 55	5 28	18 59	32	7 12	78
6	270 43.7	+4 57.1	76 06.1	82	+2 52.0	117	45	4 27	5 03	5 32	19 03	36	7 10	73
7	285 43.9	56.1	90 33.3	83	+3 03.7	116	40	36	09	36	07	38	07	71
8	300 44.1	55.2	105 00.6	83	15.3	116	35	43	14	39	10	41	06	68
9	315 44.4	54.2	119 27.9	83	26.9	116	30	49	18	42	13	43	04	66
10	330 44.6	53.3	133 55.2	83	38.5	116	20	4 58	24	46	17	47	7 02	61
11	345 44.8	+4 52.3	148 22.5	83	+3 50.1	115	10 N	5 05	5 29	5 50	19 21	51	6 59	58
12	0 45.0	+4 51.4	162 49.8	84	+4 01.6	115	0	5 09	5 33	5 54	19 25	54	6 57	54
13	15 45.2	50.4	177 17.2	84	13.1	114	10 S	12	36	5 57	29	57	55	50
14	30 45.5	49.5	191 44.6	84	24.5	114	20	13	39	6 01	34	60	52	47
15	45 45.7	48.6	206 12.0	84	35.9	114	30	13	41	05	39	64	50	42
16	60 45.9	47.6	220 39.4	84	47.3	113	35	12	42	07	42	66	48	41
17	75 46.1	+4 46.7	235 06.8	85	+4 58.6	113	40	5 11	5 42	6 09	19 45	69	6 46	38
18	90 46.3	+4 45.7	249 34.3	84	+5 09.9	112	45	5 09	5 43	6 12	19 49	72	6 44	35
19	105 46.6	44.8	264 01.7	85	21.1	112	50	06	43	16	53	76	42	31
20	120 46.8	43.8	278 29.2	85	32.3	111	52	04	43	17	55	78	41	29
21	135 47.0	42.9	292 56.7	85	43.4	111	54	03	44	19	19 58	79	39	28
22	150 47.2	41.9	307 24.2	85	+5 54.5	111	56	5 01	44	21	20 00	82	38	25
23	165 47.4	41.0	321 51.7	86	+6 05.6	110	58	4 58	44	23	03	84	36	24
24	180 47.7	+4 40.0	336 19.3		+6 16.6		60 S	4 55	5 43	6 25	20 06	87	6 35	20

UT	ARIES PMG 0h 44m.1	VENUS Mag.: −3.9 PMG: 11h 15m		MARTE Mag.: +0.7 PMG: 16h 23m		JÚPITER Mag.: −1.8 PMG: 9h 41m		SATURNO Mag.: +0.6 PMG: 15h 49m	
	hG ♈	hG ♀	Dec	hG ♂	Dec	hG ♃	Dec	hG ♄	Dec
h	° '	° '	° '	° '	° '	° '	° '	° '	° '
0	348 57.2	191 21.1	+10 45.5	114 10.0	−20 57.0	214 21.5	+17 39.2	122 08.5	−15 23.8
1	3 59.7	206 20.6	44.4	129 10.7	57.4	229 23.5	39.1	137 10.8	23.8
2	19 02.1	221 20.1	43.3	144 11.5	57.8	244 25.5	39.0	152 13.1	23.9
3	34 04.6	236 19.7	42.2	159 12.3	58.2	259 27.4	38.8	167 15.3	24.0
4	49 07.1	251 19.2	41.1	174 13.0	58.5	274 29.4	38.7	182 17.6	24.0
5	64 09.5	266 18.7	+10 40.0	189 13.8	−20 58.9	289 31.3	+17 38.6	197 19.9	−15 24.1
6	79 12.0	281 18.2	+10 38.9	204 14.5	−20 59.3	304 33.3	+17 38.4	212 22.2	−15 24.1
7	94 14.4	296 17.7	37.8	219 15.3	−20 59.7	319 35.3	38.3	227 24.4	24.2
8	109 16.9	311 17.3	36.7	234 16.0	−21 00.1	334 37.2	38.1	242 26.7	24.3
9	124 19.4	326 16.8	35.6	249 16.8	00.5	349 39.2	38.0	257 29.0	24.3
10	139 21.8	341 16.3	34.5	264 17.5	00.9	4 41.1	37.9	272 31.3	24.4
11	154 24.3	356 15.8	+10 33.4	279 18.3	−21 01.3	19 43.1	+17 37.7	287 33.6	−15 24.4
12	169 26.8	11 15.3	+10 32.3	294 19.0	−21 01.7	34 45.1	+17 37.6	302 35.8	−15 24.5
13	184 29.2	26 14.9	31.2	309 19.8	02.1	49 47.0	37.5	317 38.1	24.6
14	199 31.7	41 14.4	30.1	324 20.5	02.4	64 49.0	37.3	332 40.4	24.6
15	214 34.2	56 13.9	29.0	339 21.3	02.8	79 51.0	37.2	347 42.7	24.7
16	229 36.6	71 13.4	27.9	354 22.0	03.2	94 52.9	37.1	2 44.9	24.7
17	244 39.1	86 13.0	+10 26.8	9 22.7	−21 03.6	109 54.9	+17 36.9	17 47.2	−15 24.8
18	259 41.6	101 12.5	+10 25.7	24 23.5	−21 04.0	124 56.8	+17 36.8	32 49.5	−15 24.9
19	274 44.0	116 12.0	24.6	39 24.2	04.4	139 58.8	36.7	47 51.8	24.9
20	289 46.5	131 11.5	23.5	54 25.0	04.8	155 00.8	36.5	62 54.0	25.0
21	304 48.9	146 11.1	22.4	69 25.7	05.2	170 02.7	36.4	77 56.3	25.1
22	319 51.4	161 10.6	21.3	84 26.5	05.5	185 04.7	36.3	92 58.6	25.1
23	334 53.9	176 10.1	20.2	99 27.2	05.9	200 06.7	36.1	108 00.9	25.2
24	349 56.3	191 09.6	+10 19.1	114 28.0	−21 06.3	215 08.6	+17 36.0	123 03.1	−15 25.2
Dif	—	−5	−11	+7	−4	+20	−1	+23	−1

Figura 11: Almanaque nautico 2014



376

ESTRELLAS, 2014

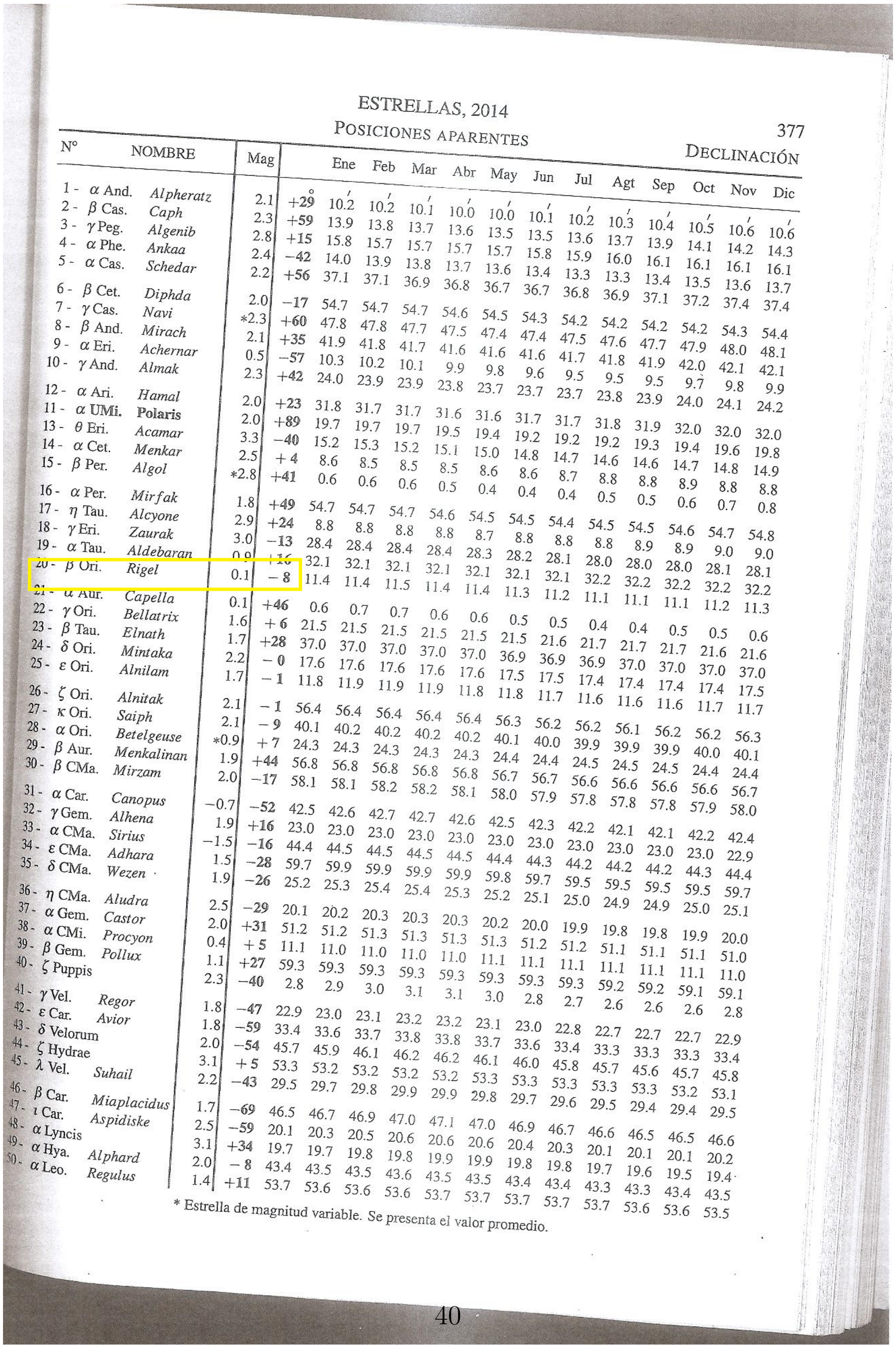
POSICIONES APARENTES

A.S.⋆

Nº		NOMBRE	Mag	°	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Agt	Sep	Oct	Nov	Dic
1 -	α And.	*Alpheratz*	2.1	**357**	43.1	43.2	43.3	43.2	43.0	42.8	42.5	42.3	42.2	42.2	42.2	42.3
2 -	β Cas.	*Caph*	2.3	**357**	30.8	31.0	31.1	31.0	30.7	30.4	30.0	29.7	29.5	29.5	29.6	29.8
3 -	γ Peg.	*Algenib*	2.8	**356**	30.5	30.6	30.6	30.6	30.4	30.2	29.9	29.7	29.6	29.6	29.6	29.7
4 -	α Phe.	*Ankaa*	2.4	**353**	15.5	15.6	15.6	15.6	15.5	15.2	14.9	14.7	14.5	14.5	14.5	14.7
5 -	α Cas.	*Schedar*	2.2	**349**	40.1	40.3	40.4	40.3	40.1	39.8	39.4	39.1	38.9	38.8	38.9	39.0
6 -	β Cet.	*Diphda*	2.0	**348**	55.6	55.6	55.7	55.7	55.5	55.3	55.1	54.9	54.7	54.7	54.7	54.8
7 -	γ Cas.	*Navi*	*2.3	**345**	36.2	36.4	36.6	36.6	36.3	36.0	35.6	35.2	34.9	34.8	34.9	35.1
8 -	β And.	*Mirach*	2.1	**342**	21.9	22.1	22.1	22.1	22.0	21.7	21.5	21.2	21.1	21.0	21.0	21.0
9 -	α Eri.	*Achernar*	0.5	**335**	26.5	26.8	26.9	27.0	26.9	26.7	26.3	26.0	25.7	25.6	25.6	25.8
10 -	γ And.	*Almak*	2.3	**328**	48.1	48.3	48.4	48.5	48.4	48.1	47.8	47.6	47.3	47.2	47.1	47.2
12 -	α Ari.	*Hamal*	2.0	**327**	60.2	60.3	60.4	60.4	60.4	60.2	59.9	59.7	59.5	59.4	59.3	59.3
11 -	α UMi.	**Polaris**	2.0	**316**	83.6	97.6	109.0	116.2	115.2	106.9	94.2	79.2	65.0	55.0	50.8	54.0
13 -	θ Eri.	*Acamar*	3.3	**315**	17.9	18.1	18.2	18.3	18.3	18.2	18.0	17.7	17.5	17.3	17.2	17.3
14 -	α Cet.	*Menkar*	2.5	**314**	14.5	14.6	14.7	14.8	14.7	14.6	14.4	14.2	14.0	13.8	13.7	13.7
15 -	β Per.	*Algol*	*2.8	**312**	43.2	43.4	43.5	43.6	43.6	43.4	43.1	42.9	42.6	42.4	42.3	42.2
16 -	α Per.	*Mirfak*	1.8	**308**	39.4	39.6	39.8	39.9	39.9	39.7	39.5	39.1	38.8	38.6	38.4	38.4
17 -	η Tau.	*Alcyone*	2.9	**302**	54.7	54.9	55.0	55.1	55.1	55.0	54.8	54.5	54.3	54.1	54.0	53.9
18 -	γ Eri.	*Zaurak*	3.0	**300**	19.4	19.5	19.6	19.7	19.8	19.7	19.5	19.3	19.1	18.9	18.8	18.7
19 -	α Tau.	*Aldebaran*	0.9	**290**	48.6	48.7	48.8	49.0	49.0	48.9	48.8	48.5	48.3	48.1	47.9	47.9
20 -	β Ori.	*Rigel*	0.1	**281**	11.4	11.4	11.6	11.7	11.8	11.7	11.6	11.4	11.2	11.0	10.8	10.7
21 -	α Aur.	*Capella*	0.1	**280**	33.4	33.5	33.7	33.9	34.0	33.9	33.7	33.5	33.1	32.8	32.6	32.4
22 -	γ Ori.	*Bellatrix*	1.6	**278**	31.3	31.3	31.5	31.6	31.7	31.6	31.5	31.3	31.1	30.9	30.7	30.6
23 -	β Tau.	*Elnath*	1.7	**278**	11.7	11.8	12.0	12.1	12.2	12.1	12.0	11.8	11.5	11.3	11.1	10.9
24 -	δ Ori.	*Mintaka*	2.2	**276**	48.7	48.7	48.9	49.0	49.1	49.0	48.9	48.7	48.5	48.3	48.1	48.0
25 -	ε Ori.	*Alnilam*	1.7	**275**	45.6	45.7	45.8	46.0	46.0	46.0	45.9	45.7	45.5	45.3	45.1	45.0
26 -	ζ Ori.	*Alnitak*	2.1	**274**	37.5	37.6	37.7	37.8	37.9	37.9	37.8	37.6	37.4	37.2	37.0	36.9
27 -	κ Ori.	*Saiph*	2.1	**272**	53.2	53.3	53.4	53.5	53.6	53.6	53.5	53.3	53.1	52.9	52.7	52.6
28 -	α Ori.	*Betelgeuse*	*0.9	**270**	60.5	60.6	60.7	60.8	60.9	60.9	60.8	60.6	60.4	60.2	60.0	59.9
29 -	β Aur.	*Menkalinan*	1.9	**269**	50.9	51.0	51.2	51.4	51.5	51.5	51.3	51.1	50.8	50.5	50.2	50.0
30 -	β CMa.	*Mirzam*	2.0	**264**	9.7	9.8	9.9	10.1	10.2	10.2	10.1	10.0	9.8	9.6	9.4	9.2
31 -	α Car.	*Canopus*	−0.7	**263**	55.4	55.6	55.8	56.1	56.3	56.4	56.3	56.2	55.9	55.6	55.3	55.1
32 -	γ Gem.	*Alhena*	1.9	**260**	21.6	21.7	21.8	21.9	22.0	22.0	21.9	21.8	21.6	21.3	21.1	20.9
33 -	α CMa.	*Sirius*	−1.5	**258**	33.0	33.0	33.2	33.3	33.4	33.5	33.4	33.3	33.1	32.9	32.6	32.5
34 -	ε CMa.	*Adhara*	1.5	**255**	11.8	11.8	12.0	12.2	12.3	12.3	12.3	12.2	12.0	11.8	11.5	11.3
35 -	δ CMa.	*Wezen*	1.9	**252**	45.0	45.1	45.2	45.4	45.5	45.5	45.5	45.4	45.2	45.0	44.8	44.6
36 -	η CMa.	*Aludra*	2.5	**248**	49.7	49.7	49.8	50.0	50.2	50.2	50.2	50.1	49.9	49.7	49.5	49.3
37 -	α Gem.	*Castor*	2.0	**246**	7.0	7.0	7.1	7.3	7.4	7.4	7.4	7.3	7.1	6.8	6.5	6.3
38 -	α CMi.	*Procyon*	0.4	**244**	58.9	58.9	59.0	59.2	59.3	59.3	59.3	59.2	59.0	58.8	58.6	58.4
39 -	β Gem.	*Pollux*	1.1	**243**	26.8	26.8	26.9	27.1	27.2	27.2	27.2	27.1	26.9	26.7	26.4	26.2
40 -	ζ Puppis		2.3	**238**	58.2	58.2	58.3	58.5	58.7	58.8	58.8	58.8	58.6	58.4	58.1	57.9
41 -	γ Vel.	*Regor*	1.8	**237**	29.8	29.9	30.0	30.2	30.4	30.6	30.6	30.5	30.4	30.1	29.8	29.6
42 -	ε Car.	*Avior*	1.8	**234**	17.1	17.2	17.3	17.6	17.9	18.2	18.3	18.2	18.0	17.7	17.3	17.0
43 -	δ Velorum		2.0	**228**	42.8	42.8	43.0	43.2	43.4	43.6	43.8	43.7	43.6	43.3	43.0	42.7
44 -	ζ Hydrae		3.1	**225**	57.5	57.4	57.5	57.6	57.7	57.8	57.8	57.7	57.6	57.4	57.2	57.0
45 -	λ Vel.	*Suhail*	2.2	**222**	51.7	51.6	51.7	51.8	52.0	52.2	52.2	52.2	52.1	51.9	51.6	51.3
46 -	β Car.	*Miaplacidus*	1.7	**221**	38.6	38.5	38.7	39.1	39.5	40.0	40.2	40.3	40.1	39.7	39.2	38.7
47 -	ι Car.	*Aspidiske*	2.5	**220**	37.2	37.1	37.2	37.4	37.7	38.0	38.1	38.2	38.0	37.8	37.4	37.0
48 -	α Lyncis		3.1	**219**	30.9	30.8	30.8	30.9	31.1	31.2	31.2	31.2	31.1	30.9	30.6	30.3
49 -	α Hya.	*Alphard*	2.0	**217**	55.4	55.3	55.3	55.4	55.5	55.6	55.6	55.6	55.5	55.4	55.1	54.9
50 -	α Leo.	*Regulus*	1.4	**207**	42.8	42.7	42.7	42.7	42.8	42.9	43.0	43.0	42.9	42.8	42.6	42.3

* Estrella de magnitud variable. Se presenta el valor promedio.

Figura 12: Almanaque nautico 2014



ESTRELLAS, 2014

POSICIONES APARENTES — 377 — DECLINACIÓN

Nº	NOMBRE		Mag		Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Agt	Sep	Oct	Nov	Dic
1 -	α And.	*Alpheratz*	2.1	+29°	10.2′	10.2′	10.1′	10.0′	10.0′	10.1′	10.2′	10.3′	10.4′	10.5′	10.6′	10.6′
2 -	β Cas.	*Caph*	2.3	+59	13.9	13.8	13.7	13.6	13.5	13.5	13.6	13.7	13.9	14.1	14.2	14.3
3 -	γ Peg.	*Algenib*	2.8	+15	15.8	15.7	15.7	15.7	15.7	15.8	15.9	16.0	16.1	16.1	16.1	16.1
4 -	α Phe.	*Ankaa*	2.4	−42	14.0	13.9	13.8	13.7	13.6	13.4	13.3	13.3	13.4	13.5	13.6	13.7
5 -	α Cas.	*Schedar*	2.2	+56	37.1	37.1	36.9	36.8	36.7	36.7	36.8	36.9	37.1	37.2	37.4	37.4
6 -	β Cet.	*Diphda*	2.0	−17	54.7	54.7	54.7	54.6	54.5	54.3	54.2	54.2	54.2	54.2	54.3	54.4
7 -	γ Cas.	*Navi*	*2.3	+60	47.8	47.8	47.7	47.5	47.4	47.4	47.5	47.6	47.7	47.9	48.0	48.1
8 -	β And.	*Mirach*	2.1	+35	41.9	41.8	41.7	41.6	41.6	41.6	41.7	41.8	41.9	42.0	42.1	42.1
9 -	α Eri.	*Achernar*	0.5	−57	10.3	10.2	10.1	9.9	9.8	9.6	9.5	9.5	9.5	9.7	9.8	9.9
10 -	γ And.	*Almak*	2.3	+42	24.0	23.9	23.9	23.8	23.7	23.7	23.7	23.8	23.9	24.0	24.1	24.2
12 -	α Ari.	*Hamal*	2.0	+23	31.8	31.7	31.7	31.6	31.6	31.7	31.7	31.8	31.9	32.0	32.0	32.0
11 -	**α UMi.**	**Polaris**	2.0	+89	19.7	19.7	19.7	19.5	19.4	19.2	19.2	19.2	19.3	19.4	19.6	19.8
13 -	θ Eri.	*Acamar*	3.3	−40	15.2	15.3	15.2	15.1	15.0	14.8	14.7	14.6	14.6	14.7	14.8	14.9
14 -	α Cet.	*Menkar*	2.5	+ 4	8.6	8.5	8.5	8.5	8.6	8.6	8.7	8.8	8.8	8.9	8.8	8.8
15 -	β Per.	*Algol*	*2.8	+41	0.6	0.6	0.6	0.5	0.4	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6	0.7	0.8
16 -	α Per.	*Mirfak*	1.8	+49	54.7	54.7	54.7	54.6	54.5	54.5	54.4	54.5	54.5	54.6	54.7	54.8
17 -	η Tau.	*Alcyone*	2.9	+24	8.8	8.8	8.8	8.8	8.7	8.8	8.8	8.8	8.9	8.9	9.0	9.0
18 -	γ Eri.	*Zaurak*	3.0	−13	28.4	28.4	28.4	28.4	28.3	28.2	28.1	28.0	28.0	28.0	28.1	28.1
19 -	α Tau.	*Aldebaran*	0.9	+16	32.1	32.1	32.1	32.1	32.1	32.1	32.1	32.2	32.2	32.2	32.2	32.2
20 -	β Ori.	*Rigel*	0.1	− 8	11.4	11.4	11.5	11.4	11.4	11.3	11.2	11.1	11.1	11.1	11.2	11.3
21 -	α Aur.	*Capella*	0.1	+46	0.6	0.7	0.7	0.6	0.6	0.5	0.5	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6
22 -	γ Ori.	*Bellatrix*	1.6	+ 6	21.5	21.5	21.5	21.5	21.5	21.5	21.6	21.7	21.7	21.7	21.6	21.6
23 -	β Tau.	*Elnath*	1.7	+28	37.0	37.0	37.0	37.0	37.0	36.9	36.9	36.9	37.0	37.0	37.0	37.0
24 -	δ Ori.	*Mintaka*	2.2	− 0	17.6	17.6	17.6	17.6	17.6	17.5	17.5	17.4	17.4	17.4	17.4	17.5
25 -	ε Ori.	*Alnilam*	1.7	− 1	11.8	11.9	11.9	11.9	11.8	11.8	11.7	11.6	11.6	11.6	11.7	11.7
26 -	ζ Ori.	*Alnitak*	2.1	− 1	56.4	56.4	56.4	56.4	56.4	56.3	56.2	56.2	56.1	56.2	56.2	56.3
27 -	κ Ori.	*Saiph*	2.1	− 9	40.1	40.2	40.2	40.2	40.2	40.1	40.0	39.9	39.9	39.9	40.0	40.1
28 -	α Ori.	*Betelgeuse*	*0.9	+ 7	24.3	24.3	24.3	24.3	24.3	24.4	24.4	24.5	24.5	24.5	24.4	24.4
29 -	β Aur.	*Menkalinan*	1.9	+44	56.8	56.8	56.8	56.8	56.8	56.7	56.7	56.6	56.6	56.6	56.6	56.7
30 -	β CMa.	*Mirzam*	2.0	−17	58.1	58.1	58.2	58.2	58.1	58.0	57.9	57.8	57.8	57.8	57.9	58.0
31 -	α Car.	*Canopus*	−0.7	−52	42.5	42.6	42.7	42.7	42.6	42.5	42.3	42.2	42.1	42.1	42.2	42.4
32 -	γ Gem.	*Alhena*	1.9	+16	23.0	23.0	23.0	23.0	23.0	23.0	23.0	23.0	23.0	23.0	23.0	22.9
33 -	α CMa.	*Sirius*	−1.5	−16	44.4	44.5	44.5	44.5	44.5	44.4	44.3	44.2	44.2	44.2	44.3	44.4
34 -	ε CMa.	*Adhara*	1.5	−28	59.7	59.9	59.9	59.9	59.9	59.8	59.7	59.5	59.5	59.5	59.5	59.7
35 -	δ CMa.	*Wezen*	1.9	−26	25.2	25.3	25.4	25.4	25.3	25.2	25.1	25.0	24.9	24.9	25.0	25.1
36 -	η CMa.	*Aludra*	2.5	−29	20.1	20.2	20.3	20.3	20.3	20.2	20.0	19.9	19.8	19.8	19.9	20.0
37 -	α Gem.	*Castor*	2.0	+31	51.2	51.2	51.3	51.3	51.3	51.3	51.2	51.2	51.1	51.1	51.1	51.0
38 -	α CMi.	*Procyon*	0.4	+ 5	11.1	11.0	11.0	11.0	11.0	11.1	11.1	11.1	11.1	11.1	11.1	11.0
39 -	β Gem.	*Pollux*	1.1	+27	59.3	59.3	59.3	59.3	59.3	59.3	59.3	59.3	59.2	59.2	59.1	59.1
40 -	ζ Puppis		2.3	−40	2.8	2.9	3.0	3.1	3.1	3.0	2.8	2.7	2.6	2.6	2.6	2.8
41 -	γ Vel.	*Regor*	1.8	−47	22.9	23.0	23.1	23.2	23.2	23.1	23.0	22.8	22.7	22.7	22.7	22.9
42 -	ε Car.	*Avior*	1.8	−59	33.4	33.6	33.7	33.8	33.8	33.7	33.6	33.4	33.3	33.3	33.3	33.4
43 -	δ Velorum		2.0	−54	45.7	45.9	46.1	46.2	46.2	46.1	46.0	45.8	45.7	45.6	45.7	45.8
44 -	ζ Hydrae		3.1	+ 5	53.3	53.2	53.2	53.2	53.2	53.3	53.3	53.3	53.3	53.3	53.2	53.1
45 -	λ Vel.	*Suhail*	2.2	−43	29.5	29.7	29.8	29.9	29.9	29.8	29.7	29.6	29.5	29.4	29.4	29.5
46 -	β Car.	*Miaplacidus*	1.7	−69	46.5	46.7	46.9	47.0	47.1	47.0	46.9	46.7	46.6	46.5	46.5	46.6
47 -	ι Car.	*Aspidiske*	2.5	−59	20.1	20.3	20.5	20.6	20.6	20.6	20.4	20.3	20.1	20.1	20.1	20.2
48 -	α Lyncis		3.1	+34	19.7	19.7	19.8	19.8	19.9	19.9	19.8	19.8	19.7	19.6	19.5	19.4
49 -	α Hya.	*Alphard*	2.0	− 8	43.4	43.5	43.5	43.6	43.5	43.5	43.4	43.4	43.3	43.3	43.4	43.5
50 -	α Leo.	*Regulus*	1.4	+11	53.7	53.6	53.6	53.6	53.7	53.7	53.7	53.7	53.7	53.6	53.6	53.5

* Estrella de magnitud variable. Se presenta el valor promedio.

Figura 13: Almanaque nautico 2014

POSICIONES APARENTES A.S.⋆

Nº	NOMBRE		Mag		Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Agt	Sep	Oct	Nov	Dic
				°	′	′	′	′	′	′	′	′	′	′	′	′
51 -	μ Velorum		2.8	**198**	8.7	8.5	8.5	8.6	8.8	8.9	9.1	9.2	9.2	9.0	8.7	8.4
52 -	ν Hydrae		3.1	**197**	24.8	24.6	24.6	24.7	24.7	24.8	24.9	24.9	24.9	24.8	24.6	24.4
53 -	β UMa.	*Merak*	2.4	**194**	19.4	19.2	19.1	19.2	19.4	19.6	19.8	19.9	19.8	19.7	19.4	19.0
54 -	α UMa.	*Dubhe*	1.8	**193**	50.9	50.6	50.5	50.6	50.8	51.1	51.3	51.4	51.4	51.3	50.9	50.5
55 -	β Leo.	*Denebola*	2.1	**182**	33.1	32.9	32.8	32.8	32.9	33.0	33.0	33.1	33.1	33.1	32.9	32.7
56 -	γ Crv.	*Gienah*	2.6	**175**	51.7	51.5	51.4	51.4	51.4	51.5	51.6	51.7	51.7	51.7	51.5	51.3
57 -	α Cru.	*Acrux*	1.3	**173**	8.5	8.1	8.0	7.9	8.0	8.2	8.5	8.8	8.9	8.9	8.6	8.2
58 -	γ Cru.	*Gacrux*	*1.6	**171**	60.2	59.8	59.7	59.6	59.7	59.9	60.1	60.3	60.4	60.4	60.1	59.8
59 -	γ Cen.	*Muhlifain*	2.4	**169**	25.1	24.8	24.6	24.6	24.6	24.7	24.9	25.1	25.2	25.1	25.0	24.7
60 -	β Cru.	*Mimosa*	1.3	**167**	51.2	50.8	50.6	50.6	50.6	50.8	51.0	51.3	51.4	51.4	51.2	50.8
61 -	ε UMa.	*Alioth*	1.8	**166**	20.3	20.0	19.8	19.7	19.8	20.0	20.2	20.4	20.5	20.6	20.4	20.1
62 -	α CVn.	*CorCaroli*	2.9	**165**	49.6	49.4	49.2	49.2	49.2	49.3	49.5	49.6	49.7	49.7	49.6	49.3
63 -	ε Vir.	*Vindemiatrix*	2.8	**164**	16.7	16.5	16.3	16.3	16.3	16.3	16.4	16.5	16.6	16.6	16.5	16.3
64 -	ζ UMa.	*Mizar*	2.3	**158**	52.7	52.4	52.1	52.1	52.1	52.3	52.5	52.7	52.8	52.9	52.8	52.6
65 -	α Vir.	*Spica*	1.0	**158**	30.8	30.5	30.4	30.3	30.3	30.4	30.4	30.5	30.6	30.6	30.5	30.3
66 -	η UMa.	*Alkaid*	1.9	**152**	58.7	58.3	58.1	58.0	58.0	58.2	58.3	58.5	58.7	58.7	58.7	58.5
67 -	β Cen.	*Hadar*	0.6	**148**	47.3	46.8	46.5	46.4	46.3	46.4	46.6	46.8	47.0	47.1	47.0	46.7
68 -	θ Cen.	*Menkent*	2.1	**148**	7.1	6.8	6.6	6.5	6.4	6.4	6.5	6.7	6.8	6.9	6.8	6.6
69 -	α Boo.	*Arcturus*	0.0	**145**	55.4	55.2	55.0	54.9	54.9	54.9	55.0	55.1	55.2	55.3	55.2	55.1
70 -	α Cen.	*Rigil Kent*	0.0	**139**	51.3	50.9	50.6	50.3	50.2	50.3	50.5	50.7	51.0	51.1	51.1	50.8
71 -	α Lib.	*Zubenelgenubi*	2.8	**137**	5.0	4.8	4.6	4.5	4.4	4.4	4.4	4.5	4.7	4.7	4.7	4.5
72 -	β UMi.	*Kochab*	2.1	**137**	20.6	19.9	19.4	19.1	19.0	19.3	19.8	20.4	20.9	21.3	21.4	21.2
73 -	β Lib.	*Zubeneschamali*	2.6	**130**	33.5	33.3	33.1	32.9	32.8	32.8	32.8	32.9	33.1	33.1	33.1	33.0
74 -	α CrB.	*Alphecca*	2.2	**126**	10.9	10.6	10.4	10.2	10.1	10.1	10.2	10.3	10.5	10.6	10.6	10.5
75 -	α Ser.	*Unukalhai*	2.7	**123**	45.6	45.4	45.2	45.0	44.9	44.9	44.9	45.0	45.2	45.2	45.3	45.2
76 -	α Sco.	*Antares*	*1.4	**112**	26.0	25.7	25.5	25.3	25.1	25.0	25.0	25.1	25.3	25.4	25.4	25.4
77 -	α TrA.	*Atria*	1.9	**107**	27.8	27.3	26.8	26.2	25.8	25.6	25.7	25.9	26.3	26.7	26.9	26.8
78 -	ε Scorpii		2.3	**107**	13.9	13.7	13.4	13.2	13.0	12.9	12.9	13.0	13.1	13.3	13.3	13.3
79 -	η Oph.	*Sabik*	2.6	**102**	12.3	12.1	11.9	11.7	11.5	11.4	11.4	11.4	11.6	11.7	11.8	11.7
80 -	α Her.	*Rasalgethi*	3.5	**101**	10.8	10.6	10.4	10.2	10.1	10.0	9.9	10.0	10.2	10.3	10.4	10.4
81 -	λ Sco.	*Shaula*	1.6	**96**	21.7	21.4	21.2	20.9	20.7	20.5	20.5	20.6	20.7	20.9	21.0	20.9
82 -	α Oph.	*Rasalhague*	2.1	**96**	6.4	6.2	6.0	5.8	5.6	5.5	5.4	5.5	5.6	5.8	5.9	5.9
83 -	θ Scorpii		1.9	**95**	25.2	25.0	24.7	24.4	24.2	24.0	23.9	24.0	24.2	24.4	24.5	24.4
84 -	γ Dra.	*Eltanin*	2.2	**90**	46.4	46.2	45.9	45.6	45.4	45.3	45.3	45.4	45.7	45.9	46.1	46.2
85 -	ε Sgr.	*KausAustralis*	1.9	**83**	43.6	43.4	43.2	42.9	42.7	42.5	42.4	42.4	42.6	42.7	42.9	42.9
86 -	α Lyr.	*Vega*	0.0	**80**	39.1	38.9	38.7	38.4	38.2	38.1	38.0	38.1	38.2	38.4	38.6	38.7
87 -	σ Sgr.	*Nunki*	2.0	**75**	58.2	58.0	57.8	57.6	57.3	57.1	57.0	57.0	57.1	57.3	57.4	57.4
88 -	α Aql.	*Altair*	0.8	**62**	8.2	8.0	7.9	7.7	7.5	7.3	7.2	7.1	7.2	7.3	7.5	7.5
89 -	γ Cyg.	*Sadr*	2.2	**54**	19.3	19.2	19.0	18.8	18.5	18.3	18.2	18.1	18.2	18.4	18.6	18.7
90 -	α Pav.	*Peacock*	1.9	**53**	19.2	19.1	18.9	18.5	18.1	17.8	17.5	17.4	17.5	17.8	18.0	18.2
91 -	α Cyg.	*Deneb*	1.3	**49**	31.6	31.6	31.4	31.2	30.9	30.6	30.5	30.4	30.5	30.7	30.9	31.1
92 -	α Cep.	*Alderamin*	2.4	**40**	16.7	16.7	16.6	16.2	15.8	15.5	15.2	15.1	15.2	15.5	15.8	16.1
93 -	ε Peg.	*Enif*	*2.1	**33**	47.0	47.0	46.9	46.7	46.5	46.3	46.1	46.0	46.0	46.1	46.2	46.3
94 -	δ Cap.	*DenebAlgedi*	2.9	**33**	2.9	2.9	2.8	2.7	2.5	2.2	2.0	1.9	1.9	2.0	2.1	2.2
95 -	α Gru.	*AlNa'ir*	1.7	**27**	43.6	43.6	43.5	43.3	43.1	42.8	42.5	42.3	42.3	42.4	42.6	42.7
96 -	β Gruis		*2.1	**19**	7.8	7.8	7.8	7.6	7.4	7.0	6.7	6.5	6.5	6.6	6.7	6.9
97 -	α PsA.	*Fomalhaut*	1.2	**15**	23.8	23.8	23.8	23.7	23.5	23.2	23.0	22.8	22.7	22.7	22.8	23.0
98 -	β Peg.	*Scheat*	*2.4	**13**	53.2	53.2	53.2	53.1	52.9	52.6	52.4	52.2	52.1	52.2	52.3	52.4
99 -	α Peg.	*Markab*	2.5	**13**	38.1	38.1	38.1	38.0	37.8	37.6	37.4	37.2	37.1	37.2	37.2	37.3

* Estrella de magnitud variable. Se presenta el valor promedio.

Figura 14: Almanaque nautico 2014

ESTRELLAS, 2014

POSICIONES APARENTES

379

DECLINACIÓN

N°	NOMBRE		Mag	°	Ene ′	Feb ′	Mar ′	Abr ′	May ′	Jun ′	Jul ′	Agt ′	Sep ′	Oct ′	Nov ′	Dic ′
51 -	μ Velorum		2.8	**−49**	29.6	29.8	30.0	30.1	30.2	30.2	30.1	30.0	29.8	29.7	29.7	29.8
52 -	ν Hydrae		3.1	**−16**	16.1	16.3	16.3	16.4	16.4	16.4	16.3	16.3	16.2	16.2	16.2	16.3
53 -	β UMa.	*Merak*	2.4	**+56**	18.0	18.1	18.2	18.4	18.4	18.5	18.4	18.3	18.2	18.0	17.9	17.8
54 -	α UMa.	*Dubhe*	1.8	**+61**	40.1	40.2	40.3	40.4	40.5	40.6	40.5	40.4	40.2	40.1	39.9	39.8
55 -	β Leo.	*Denebola*	2.1	**+14**	29.4	29.4	29.4	29.4	29.4	29.5	29.5	29.5	29.5	29.4	29.3	29.2
56 -	γ Crv.	*Gienah*	2.6	**−17**	37.2	37.3	37.4	37.5	37.5	37.5	37.4	37.4	37.3	37.3	37.3	37.4
57 -	α Cru.	*Acrux*	1.3	**−63**	10.4	10.6	10.7	10.9	11.0	11.1	11.1	11.0	10.9	10.8	10.7	10.6
58 -	γ Cru.	*Gacrux*	*1.6	**−57**	11.3	11.4	11.6	11.8	11.9	11.9	11.9	11.9	11.7	11.6	11.5	11.5
59 -	γ Cen.	*Muhlifain*	2.4	**−49**	2.0	2.2	2.3	2.5	2.6	2.6	2.6	2.5	2.4	2.3	2.2	2.2
60 -	β Cru.	*Mimosa*	1.3	**−59**	45.7	45.8	46.0	46.1	46.3	46.3	46.4	46.3	46.2	46.0	45.9	45.9
61 -	ε UMa.	*Alioth*	1.8	**+55**	52.7	52.7	52.8	52.9	53.1	53.1	53.2	53.1	53.0	52.8	52.6	52.5
62 -	α CVn.	*CorCaroli*	2.9	**+38**	14.3	14.3	14.3	14.4	14.5	14.6	14.6	14.6	14.5	14.4	14.2	14.1
63 -	ε Vir.	*Vindemiatrix*	2.8	**+10**	52.9	52.8	52.8	52.8	52.9	52.9	53.0	53.0	53.0	52.9	52.8	52.7
64 -	ζ UMa.	*Mizar*	2.3	**+54**	50.8	50.8	50.9	51.0	51.2	51.3	51.3	51.3	51.1	51.0	50.8	50.6
65 -	α Vir.	*Spica*	1.0	**−11**	14.1	14.2	14.2	14.3	14.3	14.2	14.2	14.2	14.1	14.1	14.2	14.2
66 -	η UMa.	*Alkaid*	1.9	**+49**	14.3	14.3	14.3	14.5	14.6	14.7	14.8	14.8	14.7	14.5	14.3	14.2
67 -	β Cen.	*Hadar*	0.6	**−60**	26.1	26.2	26.3	26.5	26.6	26.7	26.8	26.7	26.7	26.5	26.4	26.4
68 -	θ Cen.	*Menkent*	2.1	**−36**	26.1	26.2	26.3	26.4	26.5	26.6	26.6	26.5	26.5	26.4	26.3	26.3
69 -	α Boo.	*Arcturus*	0.0	**+19**	6.4	6.4	6.4	6.4	6.5	6.6	6.6	6.6	6.6	6.5	6.4	6.3
70 -	α Cen.	*Rigil Kent*	0.0	**−60**	53.3	53.3	53.4	53.6	53.7	53.8	53.9	53.9	53.8	53.7	53.6	53.5
71 -	α Lib.	*Zubenelgenubi*	2.8	**−16**	5.9	6.0	6.0	6.1	6.1	6.1	6.1	6.0	6.0	6.0	6.0	6.0
72 -	β UMi.	*Kochab*	2.1	**+74**	5.6	5.6	5.6	5.8	5.9	6.1	6.1	6.1	6.1	5.9	5.7	5.5
73 -	β Lib.	*Zubeneschamali*	2.6	**− 9**	26.0	26.1	26.1	26.1	26.1	26.1	26.1	26.0	26.0	26.0	26.0	26.1
74 -	α CrB.	*Alphecca*	2.2	**+26**	40.0	39.9	39.9	39.9	40.0	40.2	40.2	40.3	40.3	40.2	40.1	40.0
75 -	α Ser.	*Unukalhai*	2.7	**+ 6**	22.9	22.8	22.8	22.8	22.9	23.0	23.0	23.1	23.1	23.0	23.0	22.9
76 -	α Sco.	*Antares*	*1.4	**−26**	27.6	27.6	27.6	27.7	27.7	27.7	27.7	27.7	27.7	27.7	27.7	27.6
77 -	α TrA.	*Atria*	1.9	**−69**	2.8	2.8	2.8	2.8	2.9	3.1	3.2	3.3	3.3	3.2	3.1	3.0
78 -	ε Scorpii		2.3	**−34**	18.9	18.9	18.9	18.9	19.0	19.0	19.1	19.1	19.1	19.0	19.0	19.0
79 -	η Oph.	*Sabik*	2.6	**−15**	44.4	44.4	44.4	44.4	44.4	44.4	44.4	44.4	44.3	44.3	44.3	44.4
80 -	α Her.	*Rasalgethi*	3.5	**+14**	22.5	22.4	22.4	22.4	22.5	22.6	22.7	22.8	22.8	22.8	22.7	22.6
81 -	λ Sco.	*Shaula*	1.6	**−37**	6.6	6.6	6.6	6.6	6.6	6.7	6.7	6.7	6.7	6.7	6.7	6.6
82 -	α Oph.	*Rasalhague*	2.1	**+12**	33.1	33.0	33.0	33.0	33.1	33.2	33.2	33.3	33.3	33.3	33.3	33.2
83 -	θ Scorpii		1.9	**−43**	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.2
84 -	γ Dra.	*Eltanin*	2.2	**+51**	29.3	29.1	29.1	29.1	29.2	29.4	29.5	29.7	29.7	29.7	29.6	29.5
85 -	ε Sgr.	*KausAustralis*	1.9	**−34**	22.5	22.4	22.4	22.4	22.4	22.4	22.4	22.5	22.5	22.5	22.5	22.4
86 -	α Lyr.	*Vega*	0.0	**+38**	47.9	47.8	47.7	47.7	47.8	48.0	48.1	48.2	48.3	48.3	48.3	48.1
87 -	σ Sgr.	*Nunki*	2.0	**−26**	16.6	16.6	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5	16.5
88 -	α Aql.	*Altair*	0.8	**+ 8**	54.5	54.4	54.4	54.4	54.5	54.6	54.7	54.7	54.8	54.8	54.8	54.7
89 -	γ Cyg.	*Sadr*	2.2	**+40**	18.3	18.1	18.0	18.0	18.1	18.2	18.4	18.5	18.6	18.7	18.7	18.6
90 -	α Pav.	*Peacock*	1.9	**−56**	41.3	41.2	41.1	41.0	40.9	40.9	41.0	41.1	41.2	41.2	41.3	41.2
91 -	α Cyg.	*Deneb*	1.3	**+45**	20.0	19.9	19.8	19.7	19.8	19.9	20.1	20.2	20.4	20.5	20.5	20.4
92 -	α Cep.	*Alderamin*	2.4	**+62**	39.0	38.8	38.7	38.6	38.6	38.7	38.9	39.1	39.2	39.3	39.4	39.3
93 -	ε Peg.	*Enif*	*2.1	**+ 9**	56.5	56.4	56.4	56.4	56.5	56.6	56.7	56.8	56.8	56.9	56.9	56.8
94 -	δ Cap.	*DenebAlgedi*	2.9	**−16**	3.8	3.7	3.7	3.6	3.6	3.5	3.4	3.4	3.4	3.4	3.5	3.5
95 -	α Gru.	*AlNa'ir*	1.7	**−46**	53.6	53.5	53.4	53.3	53.2	53.1	53.1	53.1	53.2	53.3	53.4	53.4
96 -	β Gruis		*2.1	**−46**	48.8	48.7	48.5	48.4	48.3	48.2	48.2	48.2	48.3	48.4	48.5	48.5
97 -	α PsA.	*Fomalhaut*	1.2	**−29**	32.9	32.9	32.8	32.7	32.6	32.5	32.4	32.4	32.5	32.5	32.6	32.6
98 -	β Peg.	*Scheat*	*2.4	**+28**	9.7	9.6	9.6	9.5	9.5	9.6	9.7	9.9	10.0	10.1	10.1	10.1
99 -	α Peg.	*Markab*	2.5	**+15**	17.0	16.9	16.9	16.8	16.9	17.0	17.1	17.2	17.3	17.3	17.4	17.3

* Estrella de magnitud variable. Se presenta el valor promedio.

Figura 15: Almanaque nautico 2014

6. Bibliografía

Referencias

[1] E.T.S Ingeniería en Topografía, Geodesia y Cartografía, Universidad Politécnica de Madrid, Unidad Docente de Matemáticas, Septiembre (2008).

[2] Gonzalo Galiano Casas *Trigonometría Esférica con aplicaciones a la Navegación*, Universidad Oviedo 1999.

[3] Trigonometría Esférica, ETSI Topografía (UPM).

[4] Manuel Berrocoso, María Eva Ramirez, José Manuel Enriquez-Salamanca, Alejandro Perez-Peña,Universidad de Cádiz *Notas y apuntes de trigonometría esférica y astronomía de posición*(2003).

[5] Juan B.Costa, *Capitán de yate*, Estudios Náuticos Costa, C.B (2000)